Κεφάλαιο 3

Άμεσοι μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.1 Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτύξουμε υπολογιστικές μεθόδους για την αριθμητική επίλυση συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Θα περιορισθούμε σε γραμμικά συστήματα των οποίων ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων είναι τετραγωνικός και υπάρχει μια μοναδική λύση. Η λύση ενός συστήματος 20 εξισώσεων με τη μέθοδο του Gramer δεν είναι καθόλου πρακτική, γιατί ένας υπολογιστής που εκτελεί δύο εκατομμύρια πράξεις το δευτερόλεπτο, θα ήθελε δύο εκατομμύρια χρόνια για να βρεί τη λύση του παραπάνω προβλήματος! Το πλήθος των πράξεων όμως δεν είναι βασικό μόνο για την ελάττωση του υπολογιστικού χρόνου, αλλά είναι εξ ίσου καθοριστικό για την ακρίβεια των υπολογισμών λόγω συσσώρευσης των σφαλμάτων στρογγύλευσης.

Μία μέθοδος για την επίλυση πυκνών γραμμικών συστημάτων, δηλαδή συστημάτων των οποίων ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων αποτελείται κυρίως από μη μηδενικά στοιχεία (> 80%), είναι η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss. Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)}x_1 & + & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)}x_1 & + & a_{32}^{(1)}x_2 & + & a_{33}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}^{(1)}x_1 & + & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array} \tag{3.1}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ή απλά

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, \tag{3.3}$$

όπου $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ και $b^{(1)} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\det A^{(1)} \neq 0$ έτσι ώστε να υπάρχει μία και μοναδική λύση. Επίσης υποθέτουμε $b^{(1)} \neq$ του μηδενικού διανύσματος. Το πρώτο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε το σύστημα (3.1) με ένα ισοδύναμο σύστημα, το οποίο είναι απλούστερο από το (3.1). Το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\ & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\ & & a_{32}^{(2)}x_2 & + & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \tag{3.4}$$

είναι απλούστερο από το (3.1) γιατί η μεταβλητή x_1 έχει απαλειφθεί από όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη. Το σύστημα (3.4) μπορεί να γραφεί

$$\left[\begin{array}{c|cccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ \hline b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

ή απλούστερα

$$A^{(2)}x = b^{(2)}.$$

Θεωρώντας το σύστημα που αποτελείται από όλες τις εξισώσεις εκτός από την πρώτη (βλ.(3.4)) επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία απαλείφοντας τώρα τον άγνωστο x_2. Το δεύτερο βήμα είναι το εξής

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & a_{13}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & & a_{33}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\
 & & & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{n3}^{(3)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)}
\end{array}$$

ή

$$\left[\begin{array}{ccccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\
\hline
 & & a_{33}^{(3)} & \ldots & a_{3n}^{(3)} \\
 & 0 & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & & a_{n3}^{(3)} & \ldots & a_{nn}^{(3)}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \hline x_3 \\ \vdots \\ x_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \hline b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)}
\end{array}\right]$$

ή

$$A^{(3)}x = b^{(3)}.$$

Μετά από $r-1$ τέτοια βήματα θα έχουμε

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1,r-1}^{(1)} & a_{1r}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2,r-1}^{(2)} & a_{2r}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)} & a_{r-1,r}^{(r-1)} & \ldots & a_{r-1,n}^{(r-1)} \\
\hline
 & & & & a_{rr}^{(r)} & \ldots & a_{rn}^{(r)} \\
 & & 0 & & \vdots & \ldots & \vdots \\
 & & & & a_{nr}^{(r)} & \ldots & a_{nn}^{(r)}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ \hline x_r \\ \vdots \\ x_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ \hline b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)}
\end{array}\right]$$

ή

$$A^{(r)}x = b^{(r)}.$$

Τελικά, μετά από $n-1$ τέτοια βήματα το αρχικό σύστημα μετατρέπεται στο ακόλουθο τριγωνικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(1)}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n-1}^{(n-1)}x_{(n-1)} & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n & = & b_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & & & & & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)}
\end{array} \tag{3.5}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί σαν

$$A^{(n)}x = b^{(n)}, \tag{3.6}$$

όπου $A^{(n)}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Το σύστημα (3.5) μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με την προς τα πίσω αντικατάσταση από τον τύπο

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

και

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{3.7}$$

Πιο αναλυτικά η μέθοδος απαλοιφής του Gauss δημιουργεί μία ακολουθία από πίνακες $\left\{A^{(k)}\right\}, k = 1, 2, \ldots, n$, όπου $A^{(1)} = A$ και μια ακολουθία από δεξιά μέλη $\left\{b^{(k)}\right\}, k = 1, 2, \ldots, n$ τέτοια ώστε ο $A^{(n)}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Το πρώτο βήμα της μεθόδου είναι να φυλάξουμε την πρώτη από τις εξισώσεις για να την χρησιμοποιήσουμε αργότερα και να απαλείψουμε τον άγνωστο x_1 από τις υπόλοιπες $n-1$ εξισώσεις. Έτσι αν χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς

$$\begin{matrix} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \\ b_i^{(1)} = b_i \end{matrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε προκειμένου να απαλειφθεί ο x_1 από την i-οστή εξίσωση του (3.1) για $i = 2, 3, \ldots, n$, προσθέτουμε m_{i1} φορές την πρώτη εξίσωση, η οποία καλείται *οδηγός εξίσωση*, στην i-οστή εξίσωση, όπου

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{3.8}$$

με $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Το $a_{11}^{(1)}$ καλείται *οδηγό στοιχείο*. Το αποτέλεσμα της ανωτέρω εργασίας θα είναι το ακόλουθο

$$\left[a_{i2}^{(1)} + m_{i1}a_{12}^{(1)}\right] x_2 + \ldots + \left[a_{in}^{(1)} + m_{i1}a_{1n}^{(1)}\right] x_n = b_1^{(1)} + m_{i1}b_1^{(1)}$$

ή

$$a_{i2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(2)}x_n = b_i^{(2)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

όπου

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n \tag{3.9}$$

και

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Παρατηρούμε ότι ο άγνωστος x_1 πράγματι απαλείφεται από την i-οστή εξίσωση αφού

$$a_{i1}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} + m_{i1} a_{11}^{(1)} = 0,$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της (3.8). Στη συνέχεια θεωρούμε το σύστημα που αποτελείται από όλες τις εξισώσεις εκτός από την οδηγό, δηλαδή από τις $n-1$ εξισώσεις

$$\begin{array}{ccccc} a_{22}^{(2)} x_2 & + \ldots + & a_{2n}^{(2)} x_n & = & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ldots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} x_2 & + \ldots + & a_{nn}^{(2)} x_n & = & b_n^{(2)}. \end{array}$$

Έτσι αν $a_{22}^{(2)} \neq 0$, τότε ορίζουμε τους πολλαπλασιαστές m_{i2} για την απαλοιφή του x_2 από τις $n-2$ τελευταίες εξισώσεις κ.ο.κ. Κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο άνω τριγωνικό σύστημα (3.5) (ή (3.6)). Μπορούμε τώρα εύκολα να παρατηρήσουμε ότι αν $M^{(1)}$ είναι ο πίνακας

$$M^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline m_{21} & \\ m_{31} & I_{n-1} \\ \vdots & \\ m_{n1} & \end{array} \right] \tag{3.10}$$

τότε το πρώτο βήμα της απαλοιφής του Gauss μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας από αριστερά το αρχικό σύστημα επί $M^{(1)}$. Έτσι έχουμε

$$M^{(1)} A^{(1)} x = M^{(1)} b^{(1)} \tag{3.11}$$

ή

$$A^{(2)} x = b^{(2)} \tag{3.12}$$

όπου

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)} \text{ και } b^{(2)} = M^{(1)} b^{(1)}.$$

Θεώρημα 3.1.1. *Το σύστημα $A^{(1)} x = b^{(1)}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $A^{(2)} x = b^{(2)}$.*

Απόδειξη. Υποθέσαμε ότι το (3.1) έχει μια μοναδική λύση, δηλαδή $\det A^{(1)} \neq 0$. Επίσης από την (3.11) και (3.12) έχουμε

$$A^{(2)} = M^{(1)} A^{(1)}$$

ή

$$\det A^{(2)} = \left[\det M^{(1)}\right] \left[\det A^{(1)}\right] = \det A^{(1)} \neq 0$$

επειδή $\det M^{(1)} = 1$. Άρα ο $A^{(2)}$ είναι μη ιδιάζων και το σύστημα (3.4) έχει μία μοναδική λύση. Αλλά η (3.11) δείχνει ότι η λύση του (3.1) ικανοποιεί το (3.4), συνεπώς οι μοναδικές λύσεις των (3.1) και (3.4) ταυτίζονται.□

Παρατηρούμε τώρα ότι το πρώτο βήμα είναι τυπικό καθόσον μετά από $r-1$ απαλοιφές θα έχουμε, αν $a_{rr}^{(r)} \neq 0$, την οδηγό εξίσωση

$$a_{rr}^{(r)} x_r + \ldots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)}.$$

Προκειμένου να απαλειφθεί ο x_r από τις υπόλοιπες $n-r$ εξισώσεις προσθέτουμε m_{ir} φορές την οδηγό εξίσωση στην i-οστή για $i = r+1, r+2, \ldots, n$. Έτσι ορίζοντας τους πολλαπλασιαστές

$$m_{ir} = -\frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad i = r+1, r+2, \ldots, n$$

έχουμε

$$\left[a_{i,r+1}^{(r)} + m_{ir} a_{r,r+1}^{(r)}\right] x_{r+1} + \ldots + \left[a_{in}^{(r)} + m_{ir} a_{rn}^{(r)}\right] x_n = \left[b_i^{(r)} + m_{ir} b_r^{(r)}\right]$$

η οποία μπορεί να γραφεί σαν

$$a_{i,r+1}^{(r+1)} x_{r+1} + \ldots + a_{in}^{(r+1)} x_n = b_i^{(r+1)}, \quad i = r+1, r+2, \ldots, n$$

όπου

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} + m_{ir} a_{rj}^{(r)}, \quad & i = r+1, r+2, \ldots, n, \\ & j = r+1, r+2, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.13}$$

και

$$b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} + m_{ir} b_r^{(r)}, \quad i = r+1, r+2, \ldots, n.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο σύστημα

$$A^{(r+1)} x = b^{(r+1)}. \tag{3.14}$$

Είναι πάλι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν

$$M^{(r)} = \left[\begin{array}{c|ccccc} I_{r-1} & 0 & & \cdots & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & \\ & m_{r+1,r} & 1 & & \mathbf{0} & \\ \vdots & m_{r+2,r} & 0 & 1 & & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & m_{n,r} & 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right] \tag{3.15}$$

τότε το r βήμα της απαλοιφής περιγράφεται από την

$$M^{(r)}A^{(r)}x = M^{(r)}b^{(n)}$$

ή

$$A^{(r+1)}x = b^{(r+1)}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η όλη διαδικασία της τριγωνοποίησης του αρχικού πίνακα $A^{(1)}(= A)$ των συντελεστών των αγνώστων μπορεί να περιγραφεί σαν τον πολλαπλασιασμό του αρχικού συστήματος επί τον πίνακα

$$M = M^{(n-1)} \dots M^{(2)}M^{(1)}. \tag{3.16}$$

Άρα η

$$MA^{(1)}x = Mb^{(1)} \tag{3.17}$$

παράγει την

$$A^{(n)}x = b^{(n)}. \tag{3.18}$$

Θεώρημα 3.1.2. *Το σύστημα $A^{(n)}x = b^{(n)}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $A^{(1)}x = b^{(1)}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη του Θεωρήματος 3.1.1 και αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη. □

3.1.1 Επίλυση των $\mathrm{Ax_k = b_k},\ \mathrm{k} = 1, 2, \dots, \ell$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα ℓ συστήματα

$$Ax_k = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \tag{3.19}$$

όπου

$$x_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}]^T \quad \text{και} \quad b_k = [b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}]^T$$

τα οποία μπορούν να γραφούν σαν

$$AX = B \tag{3.20}$$

όπου X και B δύο $n \times \ell$ πίνακες. Με την προϋπόθεση ότι $\det A \neq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με τη μόνη διαφορά ότι αντί οι πράξεις της απαλοιφής να εκτελούνται σε μια στήλη του b τώρα εκτελούνται στις ℓ στήλες του πίνακα B.

3.1.2 Υπολογισμός του $\mathbf{A}^{-1}$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε για επίλυση τα συστήματα

$$Ax_k = e_k, \; k = 1, 2, \dots, n$$

όπου $e_k = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0]^T$ με το 1 στην k-ιοστή θέση, καθόσον τώρα στην (3.20) $B = I$.

3.1.3 Υπολογισμός της det A

Ο τριγωνικός πίνακας $A^{(n)}$ δίνεται από τη σχέση

$$A^{(n)} = MA^{(1)} \tag{3.21}$$

ή

$$\det A^{(n)} = [\det M] \left[\det A^{(1)}\right].$$

Αλλά λόγω της (3.16) έχουμε ότι

$$\det M = \prod_{r=1}^{n-1} \det M^{(r)}$$

και επειδή οι πίνακες $M^{(r)}, \; r = 1, 2, \dots, n-1$ είναι μοναδιαίοι κάτω τριγωνικοί έπεται ότι

$$\det M = 1. \tag{3.22}$$

Επειδή όμως ο $A^{(n)}$ είναι ένας τριγωνικός πίνακας έχουμε

$$\det A^{(1)} = \det A^{(n)} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)} \tag{3.23}$$

πράγμα που σημαίνει ότι η τιμή της ορίζουσας ενός πίνακα είναι το γινόμενο των οδηγών στοιχείων στη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

3.1.4 Ο αλγόριθμος της απαλοιφής του Gauss

Ο ακόλουθος αλγόριθμος περιγράφει τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss για τη λύση του $Ax = b$.

```
1. Διάβασε τα δεδομένα $A = (a_{ij})\,,\ 1 \leq i, j \leq n,\ b = (b_i),\ 1 \leq i \leq n$
2. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί $a_{i,n+1} = b_i$
3. Για $r = 1, 2, \ldots, n-1$ εκτελούνται τα βήματα 3.1-3.3
    3.1 Έστω $p$ ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο $a_{p,r} \neq 0,\ p = r, r+1, \ldots, n$. Αν δεν υπάρχει ο $p$ τότε τύπωσε “δεν υπάρχει μοναδική λύση”. Πήγαινε στο τέλος.
    3.2 Αν $p \neq r$ τότε (εναλλάσσονται οι $p$ και $r$ γραμμές)
            Για $q = r, r+1, \ldots, n$ εκτελούνται οι αντικαταστάσεις
                $b_q = a_{rq}$
                $a_{rq} = a_{pq}$
                $a_{pq} = b_q$
    3.3 Για $i = r+1, r+2, \ldots, n$ εκτελούνται τα βήματα 3.3.1-3.3.2
        3.3.1 Να τεθεί
                $m_{ir} = -\frac{a_{ir}}{a_{rr}}$
        3.3.2 Για $j = r+1, r+2, \ldots, n+1$ να τεθεί
                $a_{ij} = a_{ij} + m_{ir} a_{rj}$
4. Αν $a_{nn} = 0$ τότε τύπωσε “δεν υπάρχει μοναδική λύση”. Πήγαινε στο τέλος.
5. Να τεθεί (πίσω αντικατάσταση)
        $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$
6. Για $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ να τεθεί
        $x_i = \frac{\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right]}{a_{ii}}$
7. Εκτύπωση της λύσης $x_i,\ 1 \leq i \leq n$. Τέλος.
```

3.1.5 Τροποποίηση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss

Είναι φανερό ότι αν κάποιο οδηγό στοιχείο είναι μηδέν, τότε η μέθοδος απαλοιφής του Gauss σταματά. Για την αποφυγή μιας τέτοιας περίπτωσης ο ανωτέρω αλγόριθμος εξετάζει τους συντελεστές της r-στήλης κάτω από τη κύρια διαγώνιο μέχρις ότου να βρεθεί ένας, ο οποίος είναι διάφορος από το μηδέν, έστω ο $a_{ir}^{(r)}$. Στη συνέχεια εναλλάσει τις i και r εξισώσεις και χρησιμοποιεί τη νέα εξίσωση σαν οδηγό. Η διαδικασία αυτή δεν αλλάζει το μαθηματικό πρόβλημα καθόσον η τυπική λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων είναι ανεξάρτητη από τη διάταξη των εξισώσεων στο σύστημα. Ωστόσο όμως μπορούμε πάντοτε να βρίσκουμε ένα μη μηδενικό συντελεστή $a_{ir}^{(r)}$;

Θεώρημα 3.1.3. *Αν ο $A^{(1)}$ είναι μη ιδιάζων, τότε υπάρχει ένας μη μηδενικός συντελεστής $a_{ir}^{(r)}$.*

Απόδειξη. Ακολουθώντας το σκεπτικό της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.1 μπορούμε να δείξουμε ότι $\det A^{(r)} = \det A^{(1)}$ άρα $\det A^{(r)} \neq 0$. Αλλά

$$\det A^{(1)} = \det \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} = a_{11}^{(1)} \det \begin{pmatrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}^{(1)} \det A_{n-1}^{(2)}$$

και γενικά

$$\det A^{(r)} = \left[a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \ldots a_{r-1,r-1}^{(r-1)}\right] \det A_{n-r+1}^{(r)},$$

όπου

$$A_{n-r+1}^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς $\det A_{n-r+1}^{(r)} \neq 0$ το οποίο σημαίνει ότι ο A_{n-r+1} δεν μπορεί να έχει την πρώτη στήλη του μηδέν. Επομένως μπορούμε πάντα να βρούμε ένα οδηγό στοιχείο $\neq 0$ στην πρώτη στήλη του $A_{n-r+1}^{(r)}$. □

Σε περίπτωση λοιπόν που $a_{rr}^{(r)} = 0$, τότε αναζητείται στην r στήλη, και κάτω από τη διαγώνιο, $a_{ir}^{(r)} \neq 0$ (βλ. Θεώρημα 3.1.3). Στη συνέχεια εναλλάσονται οι r και i εξισώσεις. Στην τροποποιημένη μέθοδο της απαλοιφής χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathcal{A}^{(r)}$ και $\beta^{(r)}$ αντί των $A^{(r)}$ και $b^{(r)}$, αντίστοιχα. Η εναλλαγή των εξισώσεων αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό του

$$\mathcal{A}^{(r)}x = \beta^{(r)} \tag{3.24}$$

με τον πίνακα ($r < i$)

$$I_{ri} = \begin{array}{c|ccc|c|ccc|c|ccc|}
 & & & & r & & & & i & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \\
 & 1 & & & | & & & & | & & & \\
 & & \ddots & & | & & 0 & & | & & 0 & \\
 & & & 1 & | & & & & | & & & \\
r \rightarrow & - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
 & & & & | & 1 & & & | & & & \\
 & & 0 & & | & & \ddots & & | & & 0 & \\
 & & & & | & & & 1 & | & & & \\
i \rightarrow & - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\
 & & & & | & & & & | & 1 & & \\
 & & 0 & & | & & 0 & & | & & \ddots & \\
 & & & & | & & & & | & & & 1
\end{array}, \tag{3.25}$$

ο οποίος καλείται μεταθετικός πίνακας και για τον οποίο εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$I_{ri}^2 = I. \tag{3.26}$$

Η δημιουργία του r βήματος γίνεται με τον πολλαπλασιασμό της (3.24) με I_{ri} και στη συνέχεια με τον πολλαπλασιασμό της προκύπτουσας εξίσωσης με $M^{(r)}$. Έχουμε λοιπόν

$$\left[M^{(r)}I_{ri}\right] \mathcal{A}^{(r)}x = \left[M^{(r)}I_{ri}\right] \beta^{(r)} \tag{3.27}$$

το οποίο δίνει

$$\mathcal{A}^{(r+1)}x = \beta^{(r+1)}. \tag{3.28}$$

Στην περίπτωση όπου δεν χρειάζεται εναλλαγή των γραμμών τότε $i = r$ και

$$I_{ri} = I_{rr} = I.$$

Έτσι η όλη διαδικασία τριγωνοποίησης μπορεί τώρα να περιγραφεί τυπικά από τον πολλαπλασιασμό του

$$\mathcal{A}^{(1)}x = \beta^{(1)} \tag{3.29}$$

με τον πίνακα

$$\mathcal{M}=\left[M^{(n-1)}I_{n-1,i_{n-1}}\right]\left[M^{(n-2)}I_{n-2,i_{n-2}}\right]\cdots\left[M^{(2)}I_{2,i_2}\right]\left[M^{(1)}I_{1,i_1}\right] \tag{3.30}$$

δηλαδή το σύστημα

$$\mathcal{M}\mathcal{A}^{(1)}x=\mathcal{M}\beta^{(1)} \tag{3.31}$$

γίνεται το τριγωνικό σύστημα

$$\mathcal{A}^{(n)}x=\beta^{(n)}. \tag{3.32}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται η ισοδυναμία του τριγωνικού συστήματος (3.32) και του αρχικού (3.29).

Θεώρημα 3.1.4. *Το σύστημα* $\mathcal{A}^{(1)}x=\beta^{(1)}$ *είναι ισοδύναμο με το σύστημα* $\mathcal{A}^{(n)}x=\beta^{(n)}$.

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι $\det\mathcal{A}^{(1)}\neq 0$. Επίσης από τις (3.31) και (3.32) παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{A}^{(n)}=\mathcal{M}\mathcal{A}^{(1)} \tag{3.33}$$

επίσης

$$\det\mathcal{A}^{(n)}=[\det\mathcal{M}]\left[\det\mathcal{A}^{(1)}\right]. \tag{3.34}$$

Συνεπώς $\det\mathcal{A}^{(n)}\neq 0$ αν και μόνον αν $\det\mathcal{M}\neq 0$. Αλλά από την (3.30) έχουμε ότι

$$\det\mathcal{M}=\left[\prod_{r=1}^{n-1}\det M^{(r)}\right]\left[\prod_{r=1}^{n-1}\det I_{r,i_r}\right] \tag{3.35}$$

όπου υπενθυμίζεται ότι επειδή οι πίνακες $M^{(r)},\quad r=1,2,\ldots,n-1$ είναι μοναδιαίοι κάτω τριγωνικοί έχουμε

$$\prod_{r=1}^{n-1}\det M^{(r)}=1. \tag{3.36}$$

Αυτό που απομένει λοιπόν να δειχθεί είναι ότι

$$\prod_{r=1}^{n-1}\det I_{r,i_r}\neq 0 \tag{3.37}$$

πράγμα που ισχύει αφού για $r=1,2,\ldots,n-1$ και για $r\neq i_r$

$$\det I_{r,i_r}=-1$$

γιατί ο πίνακας I_{r,i_r} προέρχεται από τον I μετά από την εναλλαγή των r και i γραμμών (αν $r = i_r$, τότε $\det I_{rr} = 1$). Έτσι από τις (3.35), (3.36) και (3.37) συνάγεται ότι

$$\det A^{(n)} \neq 0$$

το οποίο σημαίνει ότι η (3.32) έχει μια μοναδική λύση. Η λύση του (3.29) όμως είναι η

$$x = \left[A^{(1)}\right]^{-1} \beta^{(1)}$$

η οποία ικανοποιεί την (3.32) ή την (3.31), γιατί

$$\mathcal{A}^{(n)}x = \mathcal{M}\mathcal{A}^{(1)} \left\{ \left[\mathcal{A}^{(1)}\right]^{-1} \beta^{(1)} \right\} = \mathcal{M}\beta^{(1)} = \beta^{(n)}$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα συστήματα (3.29) και (3.32) έχουν την ίδια λύση και συνεπώς είναι ισοδύναμα. □

3.1.6 Αριθμητική αστάθεια

Όταν εφαρμόζεται στην πράξη ο αλγόριθμος της απαλοιφής του Gauss θα πρέπει να εξετασθεί η επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς. Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή, η αριθμητική των υπολογιστών δεν είναι "ακριβής", καθόσον οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν στη μνήμη δεν αποτελούν σώμα, λόγω των σφαλμάτων στρογγύλευσης. Αν μπορούσαμε να παραστήσουμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς με την ακριβή τιμή τους στη μνήμη και αν μπορούσαμε να εκτελέσουμε αριθμητική με άπειρα ψηφία, τότε το πρόβλημα της αριθμητικής επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος θα μπορούσε να γίνει με την τροποποιημένη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss δίχως επιπλέον προβληματισμούς. Ωστόσο όμως θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τα αποτελέσματα των σφαλμάτων στρογγύλευσης.

Κατά τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου της απαλοιφής μας ενδιέφερε μόνον αν το υποψήφιο οδηγό στοιχείο μηδενίζεται σε κάθε βήμα. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να εξεταστεί αν το υποψήφιο οδηγό στοιχείο $a_{rr}^{(r)}$ είναι ‘μικρό’ συγκρινόμενο με μερικά από τα στοιχεία $a_{rr}^{(r)}(r < i)$. Αν το $a_{rr}^{(r)}$ είναι ‘μικρό’, τότε παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχοι πολλαπλασιαστές m_{ir} θα είναι αρκετά μεγάλοι και οι εξισώσεις που θα παράγονται από το βήμα της απαλοιφής θα έχουν συντελεστές, οι οποίοι θα είναι πολύ μεγαλύτεροι από εκείνους του προηγούμενου βήματος. Ο Wilkinson [33] παρατηρεί ότι στη περίπτωση αυτή είναι πιθανό να εμφανισθεί το φαινόμενο της αριθμητικής αστάθειας. Για την αποφυγή της εμφάνισης αυτού του φαινομένου προτείνει την εναλλαγή των γραμμών όταν τα υποψήφια οδηγά στοιχεία είναι μικρότερα από όλους τους συντελεστές στην ίδια στήλη. Πιο συγκεκριμένα επιλέγεται σαν οδηγό στοιχείο εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή στην r στήλη του $A^{(r)}$ και βρίσκεται επί ή κάτω από την r γραμμή. Αλλά τότε θα ισχύει $|m_{ir}| \leq 1$, δηλαδή

$$a_{pr}^{(r)} = \max_{i} \left| a_{ir}^{(r)} \right|, \quad r \leq i \leq n$$

οπότε και εναλλάσονται οι r και p γραμμές του $A^{(r)}$ πριν από το r-βήμα.

Η τεχνική αυτή καλείται *μερική οδήγηση* σε αντιδιαστολή με την *ολική οδήγηση* όπου σε κάθε r βήμα επιλέγεται σαν οδηγό στοιχείο εκείνο που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτο τιμή από τις τελευταίες $n-r+1$ γραμμές και στήλες του $A^{(r)}$ δηλαδή

$$a_{pr}^{(r)} = \max_{ij} \left| a_{ij}^{(r)} \right|, \quad r \leq i, j \leq n$$

οπότε εναλλάσονται οι p και r γραμμές και στήλες. Τέλος, στην περίπτωση όπου ο πίνακας είναι μεγάλης τάξης και αραιός αρκεί το οδηγό στοιχείο να είναι μεγαλύτερο από κάποιο $\varepsilon = 10^{-3}$. Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε ότι ενώ η μερική οδήγηση απαιτεί εναλλαγές γραμμών, η ολική οδήγηση είναι περισσότερο πολύπλοκη αφού απαιτεί την εναλλαγή και των στηλών.

Παράδειγμα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrrrrrr} - & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ & x_1 & + & 7x_2 & - & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

Να υπολογιστεί η λύση του ανωτέρω συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss i) χωρίς οδήγηση και ii) με μερική οδήγηση.

Λύση

(i) Κατασκευάζουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|b]$, ο οποίος στην προκειμένη περίπτωση είναι ο

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right].$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση παρουσιάζοντας τους πολλαπλασιαστές από τα αριστερά για κάθε γραμμή. Έτσι έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους υπολογισμούς

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ 1 \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -3 \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -4 & 5 \end{array}\right] \text{ 1ο βήμα}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \text{ 2ο βήμα}$$

Λύση του τριγωνικού συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcl} - x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Άρα

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_1 = 1.$$

(ii) Για την εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο ανταλλάσοντας, όπου απαιτείται, τις γραμμές του επαυξημένου πίνακα. Έτσι έχουμε

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Οι αριθμοί των
παρενθέσεων δηλώνουν
τη διάταξη των γραμμών

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ανταλλαγή των} \\ \text{δύο πρώτων γραμμών} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (1) \\ (3) \end{array} \quad \text{1ο βήμα}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ανταλλαγή των} \\ \text{δύο τελευταίων γραμμών} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \begin{array}{c} (2) \\ (3) \\ (1) \end{array} \quad \text{2ο βήμα}$$

Η λύση του τριγωνικού συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ & & \frac{15}{2}x_2 & - & 3x_3 & = & \frac{9}{2} \\ & & & - & \frac{2}{5}x_3 & = - & \frac{2}{5} \end{array}$$

είναι η

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{και} \quad x_1 = 1.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα η αναγκαία ανταλλαγή γραμμών εφαρμόστηκε άμεσα έτσι ώστε να μην ξεφύγει η προσοχή μας από την στρατηγική της μερικής οδήγησης. Στην πράξη, είναι πιο αποτελεσματικό να κάνουμε τις ανταλλαγές των γραμμών με ένα έμμεσο τρόπο. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση ενός διανύσματος διάστασης n, τέτοιου ώστε το i-οστό στοιχείο του να δηλώνει τη γραμμή του πίνακα που περιέχει τους συντελεστές της i-οστής εξίσωσης. Ας συμβολίσουμε με h το διάνυσμα αυτό με αρχικές τιμές την αρίθμηση των γραμμών, δηλαδή

$$h = [1,\ 2,\ 3, \ldots, n]^T.$$

Έτσι, κάθε φορά που απαιτείται ανταλλαγή δύο γραμμών, αρκεί μόνο η αντιμετάθεση των αντίστοιχων στοιχείων του διανύσματος. Κάθε αναφορά σε μια γραμμή του πίνακα συντελεστών ή σε ένα στοιχείο του διανύσματος του δεξιού μέλους πρέπει να γίνει μέσω του διανύσματος h. Για παράδειγμα, ο συντελεστής της πέμπτης στήλης της έβδομης εξίσωσης είναι ο $a_{h_7,5}$, ενώ το δεξί μέλος της τρίτης εξίσωσης πρέπει να προσπελαθεί σαν b_{h_3}. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το διάνυσμα h για την προσομοίωση της αντιμετάθεσης δύο γραμμών του επαυξημένου πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος. Οι αρχικές τιμές του h είναι

$$h = [1,\ \ 2,\ \ 3]^T.$$

Για τον προσδιορισμό του οδηγού στοιχείου εξετάζονται οι τιμές

$$|a_{h_1,1}| = |-1| = 1,\ \ |a_{h_2,1}| = 2,\ \ |a_{h_3,1}| = 1.$$

Η μεγαλύτερη τιμή αντιστοιχεί στη γραμμή 2 και ανταλλάσσονται το πρώτο και το δεύτερο στοιχείο του h, οπότε

$$h = [2,\ \ 1,\ \ 3]^T.$$

Μετά το βήμα της απαλοιφής ο πίνακας γίνεται (βλ. προηγούμενο παράδειγμα (ii))

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Για τον προσδιορισμό του οδηγού στοιχείου ελέγχονται οι τιμές

$$|a_{h_2,2}| = 3/2,\ \ |a_{h_3,2}| = 15/2.$$

Η μεγαλύτερη αντιστοιχεί στη γραμμή 3, συνεπώς ανταλλάσονται το δεύτερο και το τρίτο στοιχείο του h, οπότε

$$h = [2,\ \ 3,\ \ 1]^T.$$

Μετά το βήμα της απαλοιφής, ο πίνακας γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Τέλος, η προς τα πίσω αντικατάσταση δίνει

$$x_3 = \frac{b_{h_3}}{a_{h_3,3}} = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{-2/5}{-2/5} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_{h_2} - a_{h_2,3}x_3}{a_{h_2,2}} = \frac{b_3 - a_{33}x_3}{a_{32}} = \frac{9/2 - (-3)\cdot 1}{15/2} = 1$$

$$x_1 = \frac{b_{h_1} - a_{h_1,2}x_2 - a_{h_1,3}x_3}{a_{h_1,1}} = \frac{b_2 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3}{a_{21}} = \frac{1-(-1)\cdot 1 - 0\cdot 1}{2} = 1.$$

3.1.7 Ο αλγόριθμος απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση είναι ο ακόλουθος

1. Διάβασε τα δεδομένα n, $A = (a_{ij})$, $1 \le i,j \le n$ και $b = (b_i)$, $1 \le i \le n$.
2. Για $i = 1,2,\ldots,n$ να τεθεί $a_{i,n+1} = b_i$.
3. Για $i = 1,2,\ldots,n$ να τεθεί

$$h(i) = i$$

4. Για $r = 1,2,\ldots,n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.4 (διαδικασία απαλοιφής).

    4.1. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος με

$$r \le p \le n$$

και

$$|a(h(p),r)| = \max_{r\le j\le n} |a(h(j),r)|$$

4.2. Αν $a(h(p), r) = 0$ τότε τύπωσε “δεν υπάρχει μοναδική λύση”. Τέλος.

4.3. Αν $h(r) \neq h(p)$ τότε (ανταλλαγή των τιμών των $h(p)$ και $h(r)$)

$$\begin{aligned} q &= h(r) \\ h(r) &= h(p) \\ h(p) &= q \end{aligned}$$

(προσομοίωση της φυσικής ανταλλαγής των γραμμών).

4.4. Για $i = r+1, r+2, \ldots, n$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.4.1 και 4.4.2

4.4.1. Να τεθεί

$$m(h(i), r) = -\frac{a(h(i), r)}{a(h(r), r)}$$

4.4.2. Για $j = r+1, r+2, \ldots, n+1$ να εκτελεσθεί

$$a(h(i), j) = a(h(i), j) + m(h(i), r) a(h(r), j)$$

Αν $a(h(n), n) = 0$ τότε τύπωσε “δεν υπάρχει μοναδική λύση”. Πήγαινε στο τέλος.

5. Να τεθεί (πίσω αντικατάσταση)

$$x_n = a(h(n), n+1)/a(h(n), n)$$

6. Για $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ να υπολογιστούν οι

$$x_i = \frac{a(h(i), n+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(h(i), j) x_j}{a(h(i), i)}$$

7. Εκτύπωση της λύσης $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Τέλος.

Ενώ για αρκετά γραμμικά συστήματα η μερική οδήγηση παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η τεχνική αυτή δεν είναι αρκετή.

Παράδειγμα

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{lcl} 30.00x_1 & + & 591400x_2 = 591700 \\ 5.291 & - & 6.130x_2 = 46.78. \end{array}$$

Αν εφαρμοστεί ο προηγούμενος αλγόριθμος με αριθμητική τεσσάρων ψηφίων θα έχουμε

$$m_{21} = \frac{5.291}{30.00} = 0.1764$$

που οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrr} 30.00x_1 & + & 591400x_2 & = & & 591700 \\ & - & 104300x_2 & = & - & 104400 \end{array}$$

το οποίο έχει τις λύσεις $x_2 = 1.001$ και $x_1 = -10.00$.

Ωστόσο οι ακριβείς λύσεις του αρχικού συστήματος είναι οι $x_1 = 10.00$ και $x_2 = 1.000$. Μία διαδικασία μερικής οδήγησης, η οποία θα μπορούσε να αντεπεξέλθει τη δυσκολία αυτή για τις οποίες η προηγούμενη μέθοδος παρουσιάζει πρόβλημα είναι η λεγόμενη βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση. Στην τεχνική αυτή διαιρούνται οι γραμμές, από την οδηγό μέχρι την τελευταία, με τον εκάστοτε μεγαλύτερο κατά απόλυτο τιμή συντελεστή της κάθε γραμμής. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μερική οδήγηση. Για το παράδειγμα αυτό έχουμε

$$\frac{30.00}{591400} = 0.00005073 \quad \text{και} \quad \frac{5.291}{6.130} = 0.8631$$

οπότε εναλλάσσονται οι δύο γραμμές και το αποτέλεσμα της απαλοιφής δίνει τις ακριβείς λύσεις. Οι δε αλλαγές που διαφέρουν από την προηγούμενη μέθοδο είναι στα βήματα 3-4.1, τα οποία θα πρέπει να αντικατασταθούν με τα:

```
3.  Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να εκτελεσθούν τα βήματα 3.1-3.3
    3.1.  $s_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$
    3.2.  Αν $s_i = 0$ τότε τύπωσε “δεν υπάρχει μοναδική λύση”
    3.3.  $h[i] = i$

4.  Για $r = 1, 2, \ldots, n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.4
    4.1.  Έστω $p$ ο μικρότερος ακέραιος με $r \le p \le n$ και
          $\frac{|a(h(p), r)|}{s(h(p))} = \max_{r \le j \le n} \frac{|a(h(j), r)|}{s(h(j))}.$
```

Η ανωτέρω τεχνική μπορεί επίσης να πραγματοποιηθεί αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $Ax = b$ με το διαγώνιο πίνακα D^{-1} του οποίου το i-οστό διαγώνιο στοιχείο είναι το $(s_i)^{-1}$.

3.2 Η μέθοδος απαλοιφής του Jordan

Με την χρησιμοποίηση της μεθόδου της απαλοιφής του Jordan είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων σε ένα διαγώνιο πίνακα. Η μορφή αυτή του πίνακα είναι απλούστερη από εκείνη της απαλοιφής του Gauss καθόσον ο υπολογισμός του αγνώστου x_i μπορεί να προκύψει με μία απλή διαίρεση.

Θεωρώντας πάλι το σύστημα (3.1), το πρώτο βήμα της απαλοιφής του Jordan είναι ακριβώς ίδιο με εκείνο της μεθόδου απαλοιφής του Gauss, έτσι έχουμε το σύστημα (3.4) δηλαδή το

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{12}^{(2)}x_2 & + & a_{13}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}^{(2)}x_n & = & b_1^{(2)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & a_{32}^{(2)}x_2 & + & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{n2}^{(2)}x_2 & + & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
\end{array} \tag{3.38}$$

όπου παρατηρούμε ότι ο x_1 έχει απαλειφθεί από τις $n-1$ τελευταίες εξισώσεις οπότε έχουμε πάλι

$$A^{(2)}x = b^{(2)}.$$

Ωστόσο στο δεύτερο βήμα της μεθόδου της απαλοιφής του Jordan απαλείφεται ο x_2 όχι μόνο από τις $n-2$ τελευταίες εξισώσεις, αλλά συγχρόνως και από την πρώτη. Έτσι λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & & & + & a_{13}^{(3)}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}^{(3)}x_n & = & b_1^{(3)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & a_{23}^{(3)}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}^{(3)}x_n & = & b_2^{(3)} \\
 & & & & a_{33}^{(3)}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{n3}^{(3)}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)}
\end{array} \tag{3.39}$$

ή

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \tag{3.40}$$

αν υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τους επάνω δείκτες των συντελεστών της δεύτερης γραμμής εκτός του πρώτου. Μετά από $r-1$ τέτοια βήματα θα έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{llllllll}
a_{11}^{(1)}x_1 & & & & +a_{1r}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{1n}^{(r)}x_n & = b_1^{(r)} \\
 & a_{22}^{(2)}x_2 & & & +a_{2r}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{2n}^{(r)}x_n & = b_2^{(r)} \\
 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \quad\vdots \\
 & & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)}x_{r-1} & +a_{r-1,r}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{r-1,n}^{(r)}x_n & = b_{r-1}^{(r)} \\
 & & & & a_{rr}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{rn}^{(r)}x_n & = b_r^{(r)} \\
 & & & & \vdots & & \vdots & \quad\vdots \\
 & & & & a_{nr}^{(r)}x_r+ & \ldots & +a_{nn}^{(r)}x_n & = b_n^{(r)}
\end{array} \tag{3.41}$$

ή

$$A^{(r)}x = b^{(r)}$$

όπου πάλι για λόγους ομοιομορφίας αλλάξαμε τους επάνω δείκτες των συντελεστών της $r-1$ γραμμής εκτός του πρώτου. Τέλος, μετά από n τέτοια βήματα θα έχουμε το διαγώνιο σύστημα

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}^{(1)}x_1 & & & & = b_1^{(n+1)} \\
 & a_{22}^{(2)}x_2 & & & = b_2^{(n+1)} \\
 & & \ddots & & \quad\vdots \\
 & & & a_{nn}^{(n)}x_n & = b_n^{(n+1)}
\end{array} \tag{3.42}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί σαν

$$A^{(n)}x = b^{(n+1)} \tag{3.43}$$

όπου ο $A^{(n)}$ τώρα είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Η λύση του (3.43) είναι η

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} b_i^{(n+1)}$$

εφόσον $a_{ii}^{(i)} \neq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$. Αναλυτικότερα χρησιμοποιούμε πάλι τους συμβολισμούς

$$\begin{array}{r} a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \\ b_i^{(1)} = b_i \end{array}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

και αν $a_{11}^{(1)} \neq 0$, τότε ορίζουμε τους πολλαπλασιαστές

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Τώρα προκειμένου να απαλειφθεί ο x_1 από την i-οστή εξίσωση, προσθέτουμε m_{i1} φορές την πρώτη εξίσωση στην i-οστή, οπότε λαμβάνουμε το σύστημα (3.38), όπου

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{ij}a_{1j}^{(1)}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq 1 \\ j = 2, 3, \ldots, n \end{array}$$

και

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + m_{i1}b_1^{(1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq 1.$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι πριν ακολουθήσει το δεύτερο βήμα θα πρέπει για λόγους ομοιομορφίας να κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$\begin{array}{l} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \quad j = 2, 3, \ldots, n \\ b_1^{(2)} = b_1^{(1)}. \end{array}$$

Στο δεύτερο βήμα τώρα απαλείφεται ο άγνωστος x_2 τόσο από τις τελευταίες $n - 2$ εξισώσεις όσο και από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε το σύστημα (3.39) όπου

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} + m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq 2, \\ j = 3, 4, \ldots, n \end{array}$$

και

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} + m_{i2}b_2^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq 2$$

με

$$m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq 2.$$

Για λόγους ομοιομορφίας συμβολισμού θέτουμε

$$\begin{array}{l} a_{2j}^{(3)} = a_{2j}^{(2)}, \quad j = 3, 4, \ldots, n \\ b_2^{(3)} = b_2^{(2)}. \end{array}$$

Συνεχίζοντας καταλήγουμε στο διαγώνιο σύστημα (3.42). Ο μετασχηματισμός του A σε ένα διαγώνιο πίνακα της ίδιας τάξης αποτελείται από n κύρια βήματα τα οποία αντιστοιχούν σε n πράξεις των γραμμών του πίνακα. Υπό μορφή πινάκων η μέθοδος του Jordan αναζητεί ένα μη ιδιάζοντα $n \times n$ πίνακα M για τον οποίο να ισχύει

$$MAx = Mb \tag{3.44}$$

με

$$MA = I. \tag{3.45}$$

Συνεπώς

$$M = A^{-1} \tag{3.46}$$

και

$$x = Mb. \tag{3.47}$$

Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό σύστημα είναι το

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \tag{3.48}$$

τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα ότι αν $M^{(1)}$ είναι ο πίνακας

$$M^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} \mu_{11} & 0 \\ \hline \mu_{21} & \\ \mu_{31} & I_{n-1} \\ \vdots & \\ \mu_{n1} & \end{array}\right] \tag{3.49}$$

όπου

$$\mu_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{11}^{(1)}}, & i = 1 \\ \\ -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, & i \neq 1 \end{cases} \quad \text{με} \;\; a_{11}^{(1)} \neq 0. \tag{3.50}$$

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής του Jordan μπορεί να γίνει με τον πολλαπλασιασμό από αριστερά του συστήματος (3.48) επί τον $M^{(1)}$, δηλαδή

$$M^{(1)}A^{(1)}x = M^{(1)}b \tag{3.51}$$

ή

$$A^{(2)}x = b^{(2)}. \tag{3.52}$$

Έτσι το r βήμα της απαλοιφής θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$M^{(r)}A^{(r)}x = M^{(r)}b \tag{3.53}$$

όπου

$$M^{(r)} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & \mu_{1r} & & & \\ & I_{r-1} & & \vdots & & 0 & \\ & & & \mu_{r-1,r} & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mu_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & & \mu_{r+1,r} & & & \\ & 0 & & \vdots & & I_{n-r} & \\ & & & \mu_{nr} & & & \end{array}\right] \tag{3.54}$$

και τα μ_{ir} δίνονται από τον τύπο

$$\mu_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{rr}^{(r)}}, & i = r \\ & \\ -\dfrac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, & i \neq r. \end{cases} , a_{rr}^{(r)} \neq 0, \; r = 1, 2, \ldots, n.$$

Από την (3.53) προκύπτει το σύστημα

$$A^{(r+1)}x = b^{(r+1)} \tag{3.55}$$

με

$$A^{(r+1)} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \tag{3.56}$$

όπου $*$ συμβολίζει την ύπαρξη στοιχείων. Έτσι η όλη διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από τον πολλαπλασιασμό του αρχικού συστήματος με τον πίνακα

$$M = M^{(n)}M^{(n-1)} \ldots M^{(2)}M^{(1)} \tag{3.57}$$

όπου $M^{(1)}$ και $M^{(i)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1$ δίνονται από τις (3.49) και (3.54), αντίστοιχα ενώ

$$M^{(n)} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \mu_{1,n} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & \mu_{n-1,n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \mu_{nn} \end{array}\right]. \tag{3.58}$$

Άρα η

$$MA^{(1)}x = Mb^{(1)}$$

δίνει την

$$x = Mb^{(1)}. \tag{3.59}$$

Όπως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss, μπορεί να αναπτυχθεί η μέθοδος της απαλοιφής του Jordan με μερική ή ολική οδήγηση. (Η ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας αφήνεται σαν άσκηση). Στην περίπτωση αυτή η επιλογή του οδηγού στοιχείου γίνεται όπως ακριβώς στη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss και δεν επεκτείνεται στην αναζήτηση όλης της στήλης όπως ίσως θα περίμενε κανείς διότι τότε θα καταστρεφόταν η προηγούμενη διαγωνοποίηση του πίνακα. Η μέθοδος της απαλοιφής του Jordan χρησιμοποιείται συνήθως για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα ή για την επίλυση συστημάτων με τον ίδιο πίνακα συντελεστών των αγνώστων.

Παράδειγμα

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Jordan με μερική οδήγηση στο σύστημα του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{c}(2)\\(1)\\(3)\end{array}\quad\begin{array}{c}\text{Ανταλλαγή των δύο}\\\text{πρώτων γραμμών}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \end{array}\right]\begin{array}{c}(2)\\(1)\\(3)\end{array}\quad\text{1ο βήμα}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{15} \\ \\ -\frac{1}{5} \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]\begin{array}{c}(2)\\(3)\\(1)\end{array}\quad\begin{array}{c}\text{Ανταλλαγή των δύο}\\\text{τελευταίων γραμμών}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} -1 \\ -\frac{15}{2} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]\begin{array}{c}(2)\\(3)\\(1)\end{array}\quad\text{2ο βήμα}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} (2) \\ (3) \quad \text{3ο βήμα} \\ (1) \end{array}$$

Άρα η λύση είναι η $x_1 = 1, x_2 = 1$ και $x_3 = 1$.

3.2.1 Ο αλγόριθμος απαλοιφής του Jordan με μερική οδήγηση

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής του Jordan με μερική οδήγηση για την επίλυση του $Ax = b$ είναι ο ακόλουθος.

1. Διάβασε τα δεδομένα n, $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ και $b = (b_i)$, $1 \leq i \leq n$.

2. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί

$$a_{i,n+1} = b_i$$

3. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί

$$h(i) = i$$

4. Για $r = 1, 2, \ldots, n$ να εκτελεσθούν τα βήματα 4.1-4.4 (διαδικασία απαλοιφής).

    4.1. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος

    $$r \leq p \leq n$$

    και

    $$|a(h(p), r))| = \max_{r \leq j \leq n} |a(h(j), r)|$$

    4.2. Εάν $a(h(p), r) = 0$ τότε τύπωσε "δεν υπάρχει μοναδική λύση". Τέλος.
    (προσομοίωση της εναλλαγής των γραμμών)

    4.3. Εάν $h(r) \neq h(p)$ τότε

    $$\begin{array}{rcl} q & = & h(r) \\ h(r) & = & h(p) \\ h(p) & = & q \end{array}$$

4.4. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $i \neq r$ να εκτελεσθούν τα βήματα 4.4.1 και 4.4.2

4.4.1. Να τεθεί

$$m(h(i), r) = -\frac{a(h(i), r)}{a(h(r), r)}$$

4.4.2. Για $j = r+1, r+2, \ldots, n+1$ να τεθεί

$$a(h(i), j) = a(h(i), j) + m(h(i), r)a(h(r), j)$$

5. Για $i = 1, 2, \ldots, n$ να τεθεί

Εάν $a(h(i), i) = 0$ τότε τύπωσε "όχι μοναδική λύση". Τέλος.

$$x_i = a(h(i), n+1)/a(h(i), i)$$

6. Εκτύπωση της λύσης $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Τέλος

3.2.2 Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε το πλήθος και το είδος των πράξεων όπως επίσης και τις απαιτήσεις, όσον αφορά τη μνήμη, για τις μεθόδους απαλοιφής του Gauss και Jordan. Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στο k βήμα της απαλοιφής του Gauss για τη λύση ℓ συστημάτων δηλαδή

$$\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \\ n-k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right.\end{array}
\begin{array}{r}
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n}\\
 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} & \cdots & \hat{a}_{2k} & \hat{a}_{2,k+1} & \cdots & \hat{a}_{2n}\\
 & & \hat{a}_{33} & \cdots & \hat{a}_{3k} & \hat{a}_{3,k+1} & \cdots & \hat{a}_{3n}\\
 & 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & & & & \hat{a}_{kk} & \hat{a}_{k,k+1} & \cdots & \hat{a}_{kn}\\ \hline
 & & & & \hat{a}_{k+1,k} & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n}\\
 & 0 & & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
 & & & & \hat{a}_{nk} & \hat{a}_{n,k+1} & \cdots & \hat{a}_{nn}
\end{array}\right]\\
\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{k+1,k+1}\quad\cdots\quad\hat{a}_{k+1,n}}}_{n-k}\quad
\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc}
x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(\ell)}\\
x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(\ell)}\\
x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & \cdots & x_3^{(\ell)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_k^{(1)} & x_k^{(2)} & \cdots & x_k^{(\ell)}\\
x_{k+1}^{(1)} & x_{k+1}^{(2)} & \cdots & x_{k+1}^{(\ell)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(\ell)}
\end{array}\right]\\
\underbrace{\hphantom{x_{k+1}^{(1)}\quad x_{k+1}^{(2)}\quad\cdots\quad x_{k+1}^{(\ell)}}}_{l}
\end{array}$$

$$= \begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \\ n-k\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\end{array}}\right.\end{array}
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc}
b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \cdots & b_1^{(\ell)}\\
\hat{b}_2^{(1)} & \hat{b}_2^{(2)} & \cdots & \hat{b}_2^{(\ell)}\\
\hat{b}_3^{(1)} & \hat{b}_3^{(2)} & \cdots & \hat{b}_3^{(\ell)}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\hat{b}_k^{(1)} & \hat{b}_k^{(2)} & \cdots & \hat{b}_k^{(\ell)}\\ \hline
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\hat{b}_n^{(1)} & \hat{b}_n^{(2)} & \cdots & \hat{b}_n^{(\ell)}
\end{array}\right]\\
\underbrace{\hphantom{\hat{b}_n^{(1)}\quad\hat{b}_n^{(2)}\quad\cdots\quad\hat{b}_n^{(\ell)}}}_{l}
\end{array} \tag{3.60}$$

όπου το ^ πάνω από τα στοιχεία συμβολίζει ότι αυτά δεν είναι πλέον τα αρχικά στοιχεία του πίνακα A. Σύμφωνα με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss οι πράξεις για το επόμενο βήμα θα γίνουν για εκείνα τα στοιχεία τα οποία βρίσκονται στον κάτω δεξιά υποπίνακα, ο οποίος είναι $(n-k)\times(n-k+\ell)$. Σε κάθε ένα από τα στοιχεία του πίνακα αυτού θα προστεθεί ένας αριθμός (ο οποίος είναι ένα πολλαπλάσιο ενός στοιχείου της k γραμμής). Άρα απαιτούνται $(n-k)(n-k+\ell)$ προσθέσεις για το επόμενο βήμα. Παρατηρούμε ότι για τις $n-k$ γραμμές θα πρέπει να ορισθούν οι πολλαπλασιαστές m_{ik}, $k+1 \leq i \leq n$ των οποίων ο υπολογισμός απαιτεί $n-k$ διαιρέσεις. Επιπλέον, κάθε ένας από τους πολλαπλασιαστές αυτούς πολλαπλασιάζεται με τα τελευταία $n-k+\ell$ στοιχεία της k γραμμής του πίνακα A και των ℓ δεύτερων μελών. Εφόσον η διαδικασία αυτή γίνεται για όλες τις $n-k$ εξισώσεις έπεται ότι απαιτούνται $(n-k)(n-k+\ell)$ πολλαπλασιασμοί. Επειδή τώρα $k=1,2,\ldots,n-1$ το πλήθος και το είδος των πράξεων για την τριγωνοποίηση του συστήματος θα είναι

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+\ell) \qquad \begin{array}{c}\text{πολλαπλασιασμοί}\\ \text{ή προσθαφαιρέσεις}\end{array} \tag{3.61}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

οι (3.61) γράφονται

$$\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+3\ell)}{6} \qquad \begin{array}{c}\text{πολλαπλασιασμοί}\\ \text{ή προσθαφαιρέσεις}\end{array} \tag{3.62}$$

Για τον υπολογισμό των λύσεων $x_k^{(i)}$, $k=1,2,\ldots,n$, $i=1,2,\ldots,\ell$ χρησιμοποιούνται οι τύποι (3.7) από τους οποίους παρατηρούμε ότι για κάποιο i απαιτούνται $n-k$ πολλαπλασιασμοί για τα γινόμενα $a_{ij}x_j$, $k+1 \leq j \leq n$, $n-k$ προσθαφαιρέσεις και μία διαίρεση για $k=1,2,\ldots,n$, ενώ για τον υπολογισμό του $x_n^{(i)}$ απαιτείται μία διαίρεση μόνον. Συνεπώς για τον υπολογισμό όλων των $x_k^{(i)}$ απαιτούνται

$$\ell \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\ell \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \qquad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

ή προσθαφαιρέσεις

δηλαδή

$$n\ell \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)\ell}{2} \qquad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.63}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Συνεπώς το συνολικό πλήθος των πράξεων για την εύρεση της λύσης του (3.60) είναι

$$\frac{n(n-1+2\ell)}{2} \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(2n-1+6\ell)}{6} \qquad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.64}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Έτσι λοιπόν για την επίλυση ενός μόνον γραμμικού συστήματος ($\ell = 1$) η μέθοδος απαλοιφής του Gauss απαιτεί

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \qquad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.65}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Για την εύρεση του αντιστρόφου A^{-1} με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss ($\ell = n$) απαιτούνται

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2} \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{4n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.66}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πλήθος των πράξεων για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss είναι της τάξης $O(n^3/3)$ ενώ για την εύρεση του αντιστρόφου απαιτείται τετραπλάσιο πλήθος πράξεων. Έτσι πάντοτε αποφεύγουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός πίνακα (είναι προτιμότερο να λύσουμε το σύστημα) εκτός αν μας ζητείται μόνον ο A^{-1}.

Για τη μέθοδο του Jordan έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & & 0 & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \hat{a}_{22} & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \hat{a}_{kk} & \hat{a}_{k,k+1} & \cdots & \hat{a}_{kn} \\ \cline{4-7} & 0 & & \hat{a}_{k+1,k} & \hat{a}_{k+1,k+1} & \cdots & \hat{a}_{k+1,n} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \hat{a}_{nk} & \hat{a}_{n,k+1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \\ & & & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{\hat{a}_{k+1,k}\quad \hat{a}_{k+1,k+1}\quad \cdots \quad \hat{a}_{k+1,n}}}_{n-k}} \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathrm{X} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]}_{\ell} = \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathrm{B} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]}_{\ell}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για τους πολλαπλασιαστές απαιτούνται $n-1$ διαιρέσεις ενώ απαιτείται ίδιος αριθμός πολλαπλασιασμών και προσθαφαιρέσεων για τα στοιχεία του δεξιού πίνακα $(n-1) \times (n-k+\ell)$. Πιο συγκεκριμένα απαιτείται ένας πολλαπλασιασμός και μια πρόσθεση για κάθε ένα στοιχείο του υποπίνακα για την εκτέλεση ενός βήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Jordan. Έτσι απαιτούνται $(n-1)(n-k+\ell)$ πολλαπλασιασμοί και άλλες τόσες προσθέσεις. Συνεπώς για τη διαγωνιοποίηση του A απαιτούνται

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)(n-k+\ell) \qquad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

ή προσθαφαιρέσεις

ή τελικά βρίσκουμε

$$n(n-1) \qquad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί ή προσθαφαιρέσεις}$$

Αν τώρα προστεθούν και οι n διαιρέσεις για την εύρεση μιας λύσης τότε για τα ℓ συστήματα απαιτούνται $n\ell$ διαιρέσεις. Άρα τελικά για τη λύση ℓ συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής του Jordan απαιτούνται

$$n(n-1+\ell) \quad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n(n-1)(n-1+2\ell)}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί ή προσθαφαιρέσεις} \tag{3.67}$$

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος οι ανωτέρω τύποι δίνουν ($\ell = 1$)

$$n^2 \quad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί ή προσθαφαιρέσεις} \tag{3.68}$$

ενώ για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ($\ell = n$) δίνουν

$$2n^2 - n \quad \text{διαιρέσεις}$$

$$\frac{3n^3}{2} - 2n^2 + \frac{n}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί ή προσθαφαιρέσεις} \tag{3.69}$$

Από την (3.68) παρατηρούμε ότι για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο του Jordan το πλήθος των πράξεων είναι της τάξης $O(n^3/2)$. Δηλαδή η μέθοδος του Jordan απαιτεί επιπλέον πράξεις από τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος. Αλλά και για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα η μέθοδος του Jordan απαιτεί περισσότερες πράξεις. Ωστόσο αν υποτεθεί ότι για τον υπολογισμό του A^{-1} δεν λαμβάνουμε υπόψη τις πράξεις που γίνονται στα δεύτερα μέλη με τα μηδενικά και τις μονάδες, αποδεικνύεται [33] ότι οι δύο μέθοδοι απαιτούν τον ίδιο ακριβώς πλήθος πράξεων. Γι' αυτό και η μέθοδος του Jordan, αν χρησιμοποιηθεί, θα είναι μόνον για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός πίνακα.

Είναι φανερό ότι η απαλοιφή του Gauss με μερική οδήγηση θα πρέπει να προτιμάται για την λύση πυκνών γραμμικών συστημάτων. Η μέθοδος αυτή είναι ευσταθής τουλάχιστον για μία μεγάλη κλάση προβλημάτων όπως αποδεικνύει ο Wilkinson [33]. Επίσης, για πίνακες οι οποίοι είναι πραγματικοί συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι δεν χρειάζεται μερική οδήγηση προκειμένου η μέθοδος του Gauss να έχει αριθμητική ευστάθεια.

3.3 Η LU μέθοδος

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την περίπτωση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση, όπου το σύστημα $A^{(1)}x = b^{(1)}$ μετασχηματίζεται στο τριγωνικό σύστημα

$$MA^{(1)}x = Mb^{(1)}$$

ή στο

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

οπότε παρατηρούμε ότι

$$A^{(1)} = M^{-1}A^{(n)} \tag{3.70}$$

όπου λόγω της (3.57)

$$M^{-1} = \left[M^{(1)}\right]^{-1}\left[M^{(2)}\right]^{-1}\dots\left[M^{(n-1)}\right]^{-1} \tag{3.71}$$

και

$$\left[M^{(r)}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccccc} I_{r-1} & & & 0 & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & -m_{r+1,r} & 1 & & 0 & \\ 0 & -m_{r+2,r} & 0 & 1 & & \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & -m_{nr} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{3.72}$$

Με απλούς πολλαπλασιασμούς μπορούμε να βρούμε ότι

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & 0 & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & & \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & -m_{n3} & -m_{n4} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

και συνεπώς ο M^{-1} είναι ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας. Επειδή ο $A^{(n)}$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, η (3.70) δηλώνει ότι αν κανένα από τα οδηγά στοιχεία δεν μηδενίζεται, κατά τη διάρκεια του σχηματισμού του $A^{(n)}$ από τον $A^{(1)}$, τότε ο $A^{(1)}$ μπορεί να διασπασθεί σε ένα γινόμενο ενός μοναδιαίου κάτω τριγωνικού πίνακα M^{-1} και ενός άνω τριγωνικού πίνακα $A^{(n)}$. Το επόμενο θεώρημα δίνει ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μιας τέτοιας διάσπασης.

Θεώρημα 3.3.1. *Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο LU, όπου L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας και U άνω τριγωνικός πίνακας, αν*

$$\det [a_{11}] \neq 0, \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0, \ldots, \det A \neq 0.$$

Επιπλέον, η τριγωνική αυτή διαχώριση είναι μοναδική αν τα διαγώνια στοιχεία είτε του L ή του U είναι ορισμένα.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο A μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο

$$A = LU \tag{3.74}$$

όπου ο πίνακας L είναι ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας, τότε θα έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & 0 & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

Εάν εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό των πινάκων στο δεξί μέλος και εξισώσουμε με τα αντίστοιχα στοιχεία του A, θα λάβουμε n^2 μη γραμμικές εξισώσεις με n^2 αγνώστους. Είναι φανερό λοιπόν ότι αν τα διαγώνια στοιχεία του L δεν ήσαν ορισμένα (στην προκειμένη περίπτωση =1), τότε θα είχαμε n επιπλέον αγνώστους και η διαχώριση αυτή δε θα ήταν μοναδική.

Αλλά ας ξεκινήσουμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία των πινάκων L και U. Αν υπολογίσουμε τα στοιχεία της *πρώτης γραμμής* του γινομένου LU και τα εξισώσουμε με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ &\vdots \\ u_{1n} &= a_{1n} \end{aligned} \tag{3.76}$$

οι οποίες δηλώνουν ότι οι *πρώτες γραμμές των A και U ταυτίζονται.* Όμοια, αν υπολογίσουμε τα στοιχεία της *πρώτης στήλης* του LU κάτω από την κύρια διαγώνιο, λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \ell_{21}u_{11} &= a_{21} \\ \ell_{31}u_{11} &= a_{31} \\ &\vdots \\ \ell_{n1}u_{11} &= a_{n1}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Επειδή $u_{11} = a_{11}$, αν $a_{11} \neq 0$, τότε οι (3.77) μας δίνουν αμέσως τα στοιχεία της *πρώτης στήλης* του L. Γενικά, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της r γραμμής του U και στη συνέχεια τα στοιχεία της r στήλης του L, υποθέτοντας ότι τα στοιχεία των $k = 1, 2, \ldots, r-1$ γραμμών και στηλών του U και L, αντίστοιχα, έχουν προηγουμένως προσδιορισθεί. Σχηματικά η όλη κατάσταση μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ \ell_{21} & \ddots & & \mathrm{O} & \\ \vdots & & & & \\ \ell_{r1} & \cdots & 1 & & \\ \hline \ell_{r+1,1} & \cdots & \boxed{\ell_{r+1,r}} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \cdots & \boxed{\ell_{nr}} & \cdots & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccccc} u_{11} & \cdots & u_{1r} & u_{1,r+1} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & u_{r-1,r} & u_{r-1,r+1} & \cdots & u_{r-1,n} \\ \hline & & \boxed{u_{rr}} & \boxed{u_{r,r+1}} & \cdots & \boxed{u_{rn}} \\ & \mathrm{O} & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & u_{nn} \end{array}\right]$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό της r γραμμής του L διαδοχικά με την $r, r+1, \ldots, n$ στήλη του U και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A, λαμβάνουμε

$$\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj}u_{jr} + u_{rr} = a_{rr}$$

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj}u_{j,r+1} & + & u_{r,r+1} & = & a_{r,r+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj}u_{jn} & + & u_{rn} & = & a_{rn}. \end{array}$$

Οι άγνωστοι στις ανωτέρω εξισώσεις είναι οι $u_{rp},\ p = r, r+1, \ldots, n$ οπότε έχουμε

$$u_{rp} = a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj}u_{jp}, \quad p = r, r+1, \ldots, n. \tag{3.78}$$

Όμοια, εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό της r στήλης του U με τις $r+1, r+2, \dots, n$ γραμμές του L και εξισώνοντας με τα αντίστοιχα στοιχεία του A λαμβάνουμε

$$\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{r+1,j} u_{jr} + \ell_{r+1,r} u_{rr} = a_{r+1,r}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{r+2,j} u_{jr} & + & \ell_{r+2,r} u_{rr} & = & a_{r+2,r} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\sum_{j=1}^{r-1} \ell_{nj} u_{jr} & + & \ell_{nr} u_{rr} & = & a_{nr}.
\end{array}$$

Οι άγνωστοι τώρα είναι οι ℓ_{pr}, $r+1, r+2, \dots, n$ οπότε από τις ανωτέρω εξισώσεις έχουμε, αν $u_{rr} \neq 0$,

$$\ell_{pr} = \frac{1}{u_{rr}} \left(a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{pj} u_{jr} \right), \quad p = r+1, r+2, \dots, n \tag{3.79}$$

που είναι τα στοιχεία της r στήλης του L.
Επιπλέον, από την (3.78) παρατηρούμε ότι για $p = r$ έχουμε

$$u_{rr} = a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj} u_{jr}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

και αν $r = 2$ λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} u_{22} &= a_{22} - \ell_{21} u_{12} \\ &= a_{22} - \tfrac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \left(= a_{22}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

ή τελικά

$$u_{22} = \frac{1}{a_{11}} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Αλλά από την υπόθεση έχουμε ότι $a_{11} \neq 0$ και $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq 0$, άρα $u_{22} \neq 0$. Εάν λοιπόν ισχύουν οι συνθήκες της υπόθεσης, τότε $u_{rr} \neq 0$, $r = 1, 2, \dots, n$. □
Επειδή η τριγωνική διαχώριση είναι μοναδική όταν ο L είναι μοναδιαίος κάτω τριγωνικός τότε

$$A^{(1)} = LU$$

με

$$M^{-1} = L \quad \text{και} \quad A^{(n)} = U.$$

Με άλλα λόγια η μέθοδος απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση είναι μαθηματικά ίδια με την τριγωνική διαχώριση LU με L μοναδιαίο κάτω τριγωνικό πίνακα. Ο Wilkinson [33] αποδεικνύει ότι οι δύο μέθοδοι δε δίνουν μόνο τα ίδια μαθηματικά αποτελέσματα αλλά, αν οι υπολογισμοί και στις δύο διαδικασίες γίνουν σε ένα υπολογιστή με την αριθμητική της κινητής υποδιαστολής, τότε ακόμα και τα σφάλματα στρογγύλευσης είναι τα ίδια.

Επίσης, τυχόν αποτυχία της τριγωνικής διαχώρισης λαμβάνει χώρα στις ίδιες περιπτώσεις με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση. Ωστόσο υπάρχει ένα ουσιαστικό πλεονέκτημα της τριγωνικής διαχώρισης σε σχέση με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για τους υπολογιστές εκείνους που διαθέτουν τη δυνατότητα της καταχώρησης υπολογισμών της μορφής $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ σε διπλού μήκους λέξεις. Με τη δυνατότητα αυτή δεν απαιτείται επιπλέον χρόνος για να εργασθεί κανείς με διπλού μήκους λέξεις, πράγμα που σημαίνει μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς. Επειδή η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss δεν παρουσιάζει υπολογισμούς της μορφής αθροισμάτων γινομένων, γιαυτό θα πρέπει να προτιμάται η τριγωνική διαχώριση όπου είναι διαθέσιμη η ανωτέρω δυνατότητα.

Παρατηρήσεις

1. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η κλάση των πινάκων για τους οποίους δε χρειάζεται η μερική οδήγηση περιλαμβάνει εκείνους τους πίνακες, οι οποίοι είναι πραγματικοί, συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι. Περιλαμβάνει επίσης τους μη ιδιάζοντες πίνακες, οι οποίοι είναι διαγώνια υπέρτεροι, δηλαδή για τους οποίους

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.80}$$

2. Ας υποθέσουμε ότι ο A μπορεί να διαχωρισθεί

$$A = LU$$

τότε στην περίπτωση που έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λαμβάνουμε

$$LUx = b \tag{3.81}$$

ή ισοδύναμα τα δύο τριγωνικά συστήματα

$$Ly = b \tag{3.82}$$

και

$$Ux = y. \tag{3.83}$$

Η λύση του κάτω τριγωνικού συστήματος (3.82) δίνεται από τους τύπους ($\ell_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n$)

$$y_1 = b_1$$

και

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} y_j, \quad i = 2, 3, \dots, n \tag{3.84}$$

ενώ η λύση του (3.83) από τους

$$x_n = y_n / u_{nn}$$

και

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

3. Χρησιμοποιώντας την LU μέθοδο παρατηρούμε ότι τα στοιχεία των L και U υπολογίζονται αμέσως, χωρίς ενδιάμεσους υπολογισμούς όπως αυτό είναι αναγκαίο με την χρησιμοποίηση της μεθόδου απαλοιφής του Gauss. Επίσης, τόσο τα στοιχεία του L όσο και του U αποθηκεύονται στα στοιχεία του A χωρίς αυτό να προκαλεί καμία ανωμαλία. Στο τέλος δηλαδή της τριγωνικής διαχώρισης θα έχουμε, αντί του πίνακα $A = (a_{ij})$, τον ακόλουθο πίνακα για $n = 4$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \ell_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & u_{33} & u_{34} \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix}.$$

Τέλος, ας σημειωθεί ότι η τριγωνική διαχώριση για την οποία ο L είναι ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας είναι γνωστή σαν μέθοδος του Doolittle ενώ στην περίπτωση όπου ο U είναι μοναδιαίος άνω τριγωνικός είναι γνωστή σαν η μέθοδος του Crout.

Παραδείγματα

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και έστω ότι διαχωρίζεται στους παρακάτω τριγωνικούς πίνακες L και U (μέθοδος Doolittle)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν τα στοιχεία των πινάκων L, U στη συνέχεια και να λυθεί το σύστημα $Ax = b$ όπου $b = [1, 1, 1]^T$.

Λύση

Ο πολλαπλασιασμός της πρώτης γραμμής του L με πρώτη, δεύτερη και τρίτη στήλη του U και εξίσωση με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A, δίνει

$$u_{11} = a_{11} = 1, \quad u_{12} = a_{12} = 1, \quad u_{13} = a_{13} = -1.$$

Ο πολλαπλασιασμός της δεύτερης και τρίτης γραμμής του L με την πρώτη στήλη του U και εξίσωση με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A, δίνει

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} &= a_{21} \quad \text{ή} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\ l_{31}u_{11} &= a_{31} \quad \text{ή} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{-2}{1} = -2. \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της δεύτερης γραμμής του L με τη δεύτερη και τρίτη στήλη του U και εξίσωση με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A, δίνει

$$\begin{aligned} l_{21}u_{11} + 1 \cdot u_{22} &= a_{22} \quad \text{ή} \quad 1 \cdot 1 + u_{22} = 2 \\ & \qquad\quad \text{ή} \quad u_{22} = 1 \\ l_{21}u_{13} + 1 \cdot u_{23} &= a_{23} \quad \text{ή} \quad 1 \cdot (-1) + u_{23} = -2 \\ & \qquad\quad \text{ή} \quad u_{23} = -1. \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της τρίτης γραμμής του L με τη δεύτερη στήλη του U και εξίσωση με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A, δίνει

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{23} = a_{32} \quad \text{ή} \quad (-2) \cdot 1 + l_{32} \cdot 1 = 1 \quad \text{ή} \quad l_{32} = 3.$$

Ο πολλαπλασιασμός της τρίτης γραμμής του L με την τρίτη στήλη του U και εξίσωση με τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του A, δίνει

$$\begin{aligned} l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= a_{33} \quad \text{ή} \quad (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + u_{33} = 1 \\ & \qquad\quad \text{ή} \quad u_{33} = 2. \end{aligned}$$

Τελικά οι τριγωνικοί πίνακες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθοι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

i. *Λύση του συστήματος Ly=b με προς τα εμπρός αντικατάσταση*

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \quad \text{ή} \quad y_1 = 1 \\ y_2 &= b_2 - l_{21}y_1 \quad \text{ή} \quad y_2 = 0 \\ y_3 &= b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 \quad \text{ή} \quad y_3 = 3. \end{aligned}$$

ii. *Λύση του συστήματος Ux=y με προς τα πίσω αντικατάσταση*

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_3}{u_{33}} \quad \text{ή} \quad x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 &= \frac{y_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} \quad \text{ή} \quad x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 &= \frac{y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} \quad \text{ή} \quad x_1 = 1. \end{aligned}$$

2. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

και έστω ότι διαχωρίζεται στους παρακάτω τριγωνικούς πίνακες L και U (μέθοδος Crout)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν τα στοιχεία των πινάκων L, U (α) κατά γραμμές και (β) κατά στήλες.

Λύση

(α) *Υπολογισμός των στοιχείων κατά γραμμές*

Ο πολλαπλασιασμός της 1ης γραμμής του L με την 1η, 2η, 3η στήλη του U δίνει

$$u_{11} = a_{11} = 2, \quad u_{12} = a_{12} = 3, \quad u_{13} = a_{13} = 4.$$

Ο πολλαπλασιασμός της 2ης γραμμής του L με την 1η, 2η, 3η στήλη του U, παράγει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned}
l_{21}u_{11} &= a_{21} \quad \text{ή} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3 \\
l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \quad \text{ή} \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = (6 - 3 \cdot 3) = -3 \\
l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \quad \text{ή} \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -5.
\end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της 3ης γραμμής του L με την 1η, 2η, 3η στήλη του U, παράγει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned}
l_{31}u_{11} &= a_{31} \quad \text{ή} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{8}{2} = 4 \\
l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= a_{32} \quad \text{ή} \quad l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} \\
& \phantom{= a_{32}} \quad \text{ή} \quad l_{32} = (9 - 12)/-3 = 1 \\
l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= a_{33} \quad \text{ή} \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -1.
\end{aligned}$$

(β) *Υπολογισμός των στοιχείων κατά στήλες*

Ο πολλαπλασιασμός της 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με την 1η στήλη του U δίνει

$$\begin{aligned}
u_{11} &= a_{11} \quad \text{ή} \quad u_{11} = 2 \\
l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} \quad \text{ή} \quad l_{21} = \frac{6}{2} = 3 \\
l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} \quad \text{ή} \quad l_{31} = \frac{8}{2} = 4.
\end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με την 2η στήλη του U δίνει

$$\begin{aligned}
u_{12} &= a_{12} \quad \text{ή} \quad u_{12} = 3 \\
l_{21}u_{12} + u_{22} &= a_{22} \quad \text{ή} \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\
& \phantom{= a_{22}} \quad \text{ή} \quad u_{22} = 6 - 9 = -3 \\
l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} &= a_{32} \quad \text{ή} \quad l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} \\
& \phantom{= a_{32}} \quad \text{ή} \quad l_{32} = (9 - 4 \cdot 3)/(-3) = 1.
\end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός της 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με την 3η στήλη του U δίνει

$$\begin{aligned}
u_{13} &= a_{13} \quad \text{ή} \quad u_{13} = 4 \\
l_{21}u_{13} + u_{23} &= a_{23} \quad \text{ή} \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \\
& \qquad\quad \text{ή} \quad u_{23} = 7 - 12 = -5 \\
l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} &= a_{33} \quad \text{ή} \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \\
& \qquad\quad \text{ή} \quad u_{33} = 10 - 4 \cdot 4 - 1(-5) = -1.
\end{aligned}$$

Τελικά οι τριγωνικοί πίνακες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθοι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Ο Αλγόριθμος της LU μεθόδου

Ο παρακάτω αλγόριθμος παραγοντοποιεί ένα $n \times n$ πίνακα A με την LU μέθοδο.

1. Διάβασε τα δεδομένα: την τάξη n, τα στοιχεία $a_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$ του A και τα στοιχεία $l_{ii},\ 1 \leq i \leq n$ του L ή τα στοιχεία $u_{ii},\ 1 \leq i \leq n$ του U.

2. Να επιλεγούν l_{11} και u_{11} τέτοια ώστε να ικανοποιείται η $l_{11}u_{11} = a_{11}$.

   Αν $l_{11}u_{11} = 0$ τότε τύπωσε "παραγοντοποίηση αδύνατος". Τέλος.

3. Για $j = 2, 3, \ldots, n$ να τεθεί

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}/l_{11}(\text{ πρώτη γραμμή του } U) \\ l_{j1} &= a_{j1}/u_{11}(\text{ πρώτη γραμμή του } L) \end{aligned}$$

4. Για $r = 2, 3, \ldots, n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.2

   4.1 Να επιλεγούν l_{rr} και u_{rr} ώστε να ικανοποιείται η

$$l_{rr}\, u_{rr} = a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jr}$$

   Αν $l_{rr}\, u_{rr} = 0$ τότε τύπωσε "παραγοντοποίηση αδύνατος".

4.2 Για $p = r+1, r+2, \ldots, n$ να τεθεί

$$u_{rp} = \left(a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jp} \right) / \, l_{rr} \quad (\, r \text{ γραμμή του } U)$$

και

$$l_{pr} = \left(a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\, u_{jr} \right) / \, u_{rr} \quad (\, r \text{ γραμμή του } L)$$

5. Να επιλεγούν u_{nn} και l_{nn} ώστε να ικανοποιείται η

$$u_{nn}\, l_{nn} = a_{nn} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{nj}\, u_{jn}$$

(Παρατηρούμε ότι αν $l_{nn}\, u_{nn} = 0$, τότε $A = LU$ αλλά ο A θα είναι ένας ιδιάζων πίνακας)

6. Εκτύπωση των $l_{ij},\ 1 \le j \le i,\ 1 \le i \le n$

Εκτύπωση των $u_{ij},\ i \le j \le n,\ 1 \le i \le n$

Τέλος

Παρατήρηση

Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι υπολογισμού των στοιχείων των L και U. Αν φανταστούμε ότι τα στοιχεία των πινάκων αυτών είναι τοποθετημένα σε ένα πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \ldots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

τότε είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα κατά γραμμές, ξεκινώντας από την πρώτη, δεύτερη, τρίτη κ.ο.κ. Πράγματι, έχουμε ότι

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον υπολογισμό της r γραμμής του παραπάνω πίνακα, δηλαδή έχουμε

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
l_{21} & 1 & & & & \mathrm{O} & & \\
l_{31} & l_{32} & 1 & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
\hline
l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \dots & l_{r,r-1} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n,r-1} & \dots & l_{n,n-1} & 1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccccc}
u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} & \dots & u_{1n} \\
 & u_{22} & \dots & u_{2r} & \dots & u_{2n} \\
\mathrm{O} & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\hline
 & & & u_{rr} & \dots & u_{rn} \\
 & \mathrm{O} & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & u_{nn}
\end{array}\right]$$

όπου τα στοιχεία πάνω από την οριζόντιο γραμμή έχουν ήδη υπολογισθεί, τότε τα στοιχεία της r γραμμής του L υπολογίζονται από την λύση του συστήματος

$$\begin{array}{lllllllll}
l_{r1}u_{11} & & & & & & & & = a_{r1} \\
l_{r1}u_{12} & + & l_{r2}u_{22} & & & & & & = a_{r2} \\
l_{r1}u_{13} & + & l_{r2}u_{23} & + & l_{r3}u_{33} & & & & = a_{r3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
l_{r1}u_{1r} & + & l_{r2}u_{2r} & + & l_{r3}u_{3r} & + & \dots & + \; l_{r,r-1}u_{r-1,r-1} & = a_{r,r-1}
\end{array}$$

ή του

$$\begin{bmatrix}
u_{11} & & & & \mathrm{O} \\
u_{12} & u_{22} & & & \\
u_{13} & u_{23} & u_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
u_{1,r-1} & u_{2,r-1} & u_{3,r-1} & \dots & u_{r-1,r-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} l_{r1} \\ l_{r2} \\ l_{r3} \\ \vdots \\ l_{r,r-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \\ a_{r3} \\ \vdots \\ a_{r,r-1} \end{bmatrix}$$

ενώ τα στοιχεία της r γραμμής του U υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u_{rp} = a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jp}, \quad p = r, r+1, \dots, n.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία των L και U κατά στήλες. Εργαζόμενοι ανάλογα έχουμε για

$$L=\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & & & & & & & \\
l_{21} & 1 & & & & & & \\
l_{31} & l_{32} & 1 & & & \text{O} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \dots & l_{r,r-1} & 1 & & \\
l_{r+1,1} & l_{r+1,2} & l_{r+1,3} & \dots & l_{r+1,r-1} & l_{r+1,r}1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n,r-1} & l_{n,r} & \dots & 1
\end{array}\right]$$

και

$$U=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\
 & u_{22} & \cdots & u_{2r} & \cdots & u_{2n} \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & u_{rr} & \cdots & u_{rn} \\
 & \text{O} & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & u_{nn}
\end{array}\right].$$

Από την $LU = A$ προκύπτει το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
u_{1r} & & & & & & & & & = a_{1r} \\
l_{21}u_{1r} & + & u_{2r} & & & & & & & = a_{2r} \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & \vdots \\
l_{r1}u_{1r} & + & l_{r2}u_{2r} & + & \dots & + & l_{r,r-1}u_{r-1,r} & + & u_{rr} & = a_{rr}
\end{array}$$

ή

$$\begin{bmatrix}
1 & & & & & \\
l_{21} & 1 & & & \text{O} & \\
l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \dots & l_{r,r-1} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1r} \\ u_{2r} \\ u_{3r} \\ \vdots \\ u_{rr} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ a_{3r} \\ \vdots \\ a_{rr} \end{bmatrix}$$

όπου ο υπολογισμός της r στήλης του L γίνεται από τις σχέσεις

$$l_{pr} = \left(a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\, u_{jr} \right) \;/\; u_{rr}, \quad p = r+1, r+2, \ldots, n.$$

3.4 Παραλλαγές της LU μεθόδου

Γενικά η LU παραγοντοποίηση του A δεν είναι μοναδική. Αν $A = LU$ είναι μια LU παραγοντοποίηση του A και D είναι ένας μη ιδιάζων διαγώνιος πίνακας τότε $L' = LD$ είναι ένας κάτω τριγωνικός και $U' = D^{-1}U$ είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, άρα

$$A = LU = LDD^{-1}U = L'U'$$

και $L'U'$ είναι επίσης μια LU παραγοντοποίηση του A. Το παράδειγμα αυτό δείχνει τη δυνατότητα κανονικοποίησης των LU παραγοντοποιήσεων ενός πίνακα με την εισαγωγή ενός διαγωνίου πίνακα.

Ορισμός. Θα λέμε ότι

$$A = LDU$$

είναι μια LDU παραγοντοποίηση του A αν ο L είναι μοναδιαίος κάτω τριγωνικός, ο D είναι διαγώνιος και ο U είναι μοναδιαίος άνω τριγωνικός.

Θεώρημα 3.4.1. *Ο μη ιδιάζων πίνακας A έχει μια μοναδική LDU παραγοντοποίηση αν και μόνο αν οι υποπίνακες $A^{[r]}$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ όπου*

$$A^{[r]} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμοι.

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύεται ότι αν ο A έχει μια LDU παραγοντοποίηση τότε αυτή είναι μοναδική. Έστω $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$. Επειδή ο A είναι μη ιδιάζων, το ίδιο είναι και οι D_1 και D_2. Από την εξίσωση

$$L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$$

έχουμε

$$L_2^{-1}L_1 = D_2U_2U_1^{-1}D_1^{-1}. \tag{3.85}$$

Το αριστερό μέλος της (3.85) είναι ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας και το δεξί μέλος είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Συνεπώς και τα δύο μέλη είναι ένας ταυτοτικός πίνακας, πράγμα που σημαίνει

$$L_2^{-1}L_1 = I$$

και

$$L_1 = L_2.$$

Όμοια μπορεί να δειχθεί ότι

$$U_1 = U_2.$$

Τέλος επειδή οι L_1 και U_1 είναι μη ιδιάζοντες, η $L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$ δηλώνει ότι

$$D_1 = D_2.$$

Απομένει λοιπόν να αποδειχθεί ότι ο A έχει μια LDU παραγοντοποίηση αν και μόνο αν οι $A^{[1]} \ldots A^{[n-1]}$ είναι μη ιδιάζοντες.

Πρώτα υποθέτουμε ότι $A = LDU$ είναι μια LDU παραγοντοποίηση του A. Τότε οι L, D και U είναι μη ιδιάζοντες. Επειδή οι L και U είναι τριγωνικοί και ο D είναι διαγώνιος έπεται ότι οι $L^{[k]}$, $D^{[k]}$ και $U^{[k]}$ είναι μη ιδιάζοντες. Άλλά $A^{[k]} = L^{[k]}D^{[k]}U^{[k]}$ άρα ο $A^{[k]}$ είναι μη ιδιάζων. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι οι $A^{[r]}$, $r = 1, 2, \ldots, n-1$ είναι μη ιδιάζοντες. Τότε από το Θεώρημα 3.3.1 και την παρατήρηση μπορεί να εφαρμοστεί η μεθοδος της απαλοιφής του Gauss και να λάβουμε $A = LA^{(n)}$ όπου L και $A^{(n)}$ δίνονται από τις (3.73) και (3.21), αντίστοιχα. Τα διαγώνια στοιχεία του $A^{(n)}$ είναι τώρα τα οδηγά στοιχεία $a_{kk}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ τα οποία είναι διάφορα του μηδενός. Έστω $D = diag\,(a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n)})$ και $U = D^{-1}A^{(n)}$, τότε η

$$A = LDU$$

είναι μια του A. ☐

Από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι φανερό ότι αν υπάρχει μια LDU παραγοντοποίηση του A τότε

$$\begin{array}{ll} l_{ij} = -m_{ij}, & i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1 \\ d_{ii} = a_{ii}^{(i)}, & i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

και

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,\ j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν τρεις σημαντικές παραλλαγές μιας LDU παραγοντοποίησης. Η πρώτη είναι η

$$A = (LD)U = L'U$$

οπότε η διαχώριση είναι η

$$\begin{bmatrix} l'_{11} & & & 0 \\ l'_{21} & l'_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l'_{n1} & l'_{n2} & \ldots & l'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{11} & \ldots & u_{nn} \\ & 1 & \ldots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = L'U$$

όπου

$$l'_{ii} = d_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ l'_{ij} = l_{ij} d_{ii},\ i = 2, 3, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, i-1$$

και η οποία είναι η Crout παραγοντοποίηση. Ωστόσο, αν συγκρίνουμε τα στοιχεία στην εξίσωση πινάκων $A = LDU$, τότε εργαζόμενοι ανάλογα όπως στο Θεώρημα 3.3.1 έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\ l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \ldots & l_{r,r-1} & 1 & & \\ l_{r+1,1} & l_{r+1,2} & l_{r+1,3} & \ldots & l_{r+1,r-1} & l_{r+1,r} 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots & l_{n,r-1} & l_{n,r} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & & 0 \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \ldots & u_{1r} & u_{1,r+1} & \ldots & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & u_{r,r+1} & \ldots & u_{rn} \\ & & & & 1 & \ldots & u_{r+1,n} \\ & & 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ή

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & & & & & & & \\
l_{21} & 1 & & & & & & \\
l_{31} & l_{32} & 1 & & & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
l_{r1} & l_{r2} & l_{r3} & \cdots & l_{r,r-1} & 1 & & \\
\hline
l_{r+1,1} & l_{r+1,2} & l_{r+1,3} & \cdots & l_{r+1,r-1} & \boxed{l_{r+1,r}} & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n,r-1} & \boxed{l_{n,r}} & \cdots & 1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{ccccccc}
d_{11} & d_{11}u_{12} & \cdots & d_{11}u_{1r} & d_{11}u_{1,r-1} & \cdots & d_{11}u_{1n} \\
 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \boxed{d_{rr}} & d_{rr}u_{r,r+1} & \cdots & d_{rr}u_{rn} \\
 & & & & \ddots & & \vdots \\
 & 0 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & d_{nn}
\end{array}\right]$$

ή τελικά

$$\begin{aligned}
d_{11} &= a_{11} \\
d_{11}u_{12} &= a_{12} \\
\vdots & \quad \vdots \\
d_{11}u_{1n} &= a_{1n}
\end{aligned}$$

οπότε

$$d_{11} = a_{11}$$

και

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_{11}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
l_{21}d_{11} &= a_{21} \\
& \vdots \\
l_{n1}d_{11} &= a_{n1}
\end{aligned}$$

άρα

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{d_{11}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Γενικά λοιπόν έχουμε

$$a_{rr} = \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, d_{jj}\, u_{jr} + d_{rr}, \quad r = 2, 3, \ldots, n.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} a_{rp} &= \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, d_{jj}\, u_{jp} + d_{rr}\, u_{rp}, \qquad p = r+1, r+2, \ldots, n \\ a_{pr} &= \sum_{j=1}^{r-1} l_{pr}\, d_{jj}\, u_{jr} + l_{pr}\, d_{rr}, \qquad p = r+1, r+2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, για τον υπολογισμό των L, D και U έχουμε

$$\left.\begin{aligned} d_{rr} &= a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, d_{jj}\, u_{jr} \\ u_{rp} &= \left(a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, d_{jj}\, u_{jp} \right) / \, d_{rr} \\ l_{rp} &= \left(a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\, d_{jj}\, u_{jr} \right) / \, d_{rr} \end{aligned}\right\} p = r{+}1, r{+}2, \ldots, n, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Η δεύτερη παραλλαγή είναι η

$$A = L(DU) = LU'$$

οπότε η διαχώρηση είναι η

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ l_{n1} & \ldots & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{11} & \ldots & \ldots & u'_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u'_{nn} \end{bmatrix} = LU'$$

όπου

$$u'_{ii} = d_{ii},\ i = 1, 2, \dots, n \text{ και } u'_{ij} = d_i\, u_{ij} = a^{(i)}_{ij}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

η οποία είναι γνωστή σαν η Doolittle παραγοντοποίηση.

Όταν ο A είναι συμμετρικός τότε η LU παραγοντοποίηση καταστρέφει τη συμμετρία ($L \neq U^T$). Στη περίπτωση αυτή θεωρούμε τη μορφή

$$A = LDL^T \tag{3.86}$$

όπου L είναι ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας. Αν τα διαγώνια στοιχεία του D είναι θετικά τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα

$$D^{1/2} = diag(d_{11}^{1/2}, \dots, d_{nn}^{1/2}) \tag{3.87}$$

οπότε ο A μπορεί να γραφεί σαν

$$A = LDL^T = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T = \overline{L}\overline{L}^T \tag{3.88}$$

όπου

$$\overline{L} = LD^{1/2}. \tag{3.89}$$

Συνεπώς ο A μπορεί να γραφεί σαν

$$A = LL^T.$$

Η παραγοντοποίηση αυτή είναι γνωστή σαν η μέθοδος του Choleski και εφαρμόζεται στους συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες καθόσο για τους πίνακες αυτούς υπάρχει πάντα μια Choleski παραγοντοποίηση. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα η παραγοντοποίηση του Choleski.

Ορισμός. Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος αν για $x \neq 0$ συνεπάγεται

$$x^T A x > 0$$

και θετικά ημιορισμένος αν

$$x^T A x \geq 0.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ο πίνακας $B = A^T A$ είναι συμμετρικός, πράγματι

$$B^T = (A^T A)^T = A^T A = B.$$

Επίσης ο B είναι θετικά ημιορισμένος. Πράγματι, έστω $x \neq 0$ και $y = Ax$, τότε

$$x^T Bx = x^T A^T Ax = y^T y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0.$$

Αν επιπλέον ο βαθμός (rank) του A είναι n, τότε για $x \neq 0$ και $y = Ax \neq 0$, οπότε $x^T Bx > 0$ άρα ο B είναι θετικά ορισμένος.

Θεώρημα 3.4.2. *Αν ο A είναι $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας τότε ο A είναι μη ιδιάζων.*

Απόδειξη. Αν $x \neq 0$ είναι ένα διάνυσμα για το οποίο $Ax = 0$ τότε

$$x^T Ax = 0$$

πράγμα που είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς το $Ax = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση άρα ο πίνακας A είναι μη ιδιάζων. □

Κύριος υποπίνακας ενός πίνακα A είναι εκείνος που σχηματίζεται από τα στοιχεία του A, τα οποία βρίσκονται στις τομές των γραμμών και στηλών $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$.

Θεώρημα 3.4.3. *Ένας κύριος υποπίνακας ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικά ορισμένος.*

Απόδειξη. Έστω ένας κύριος υποπίνακας του A ο οποίος σχηματίζεται από την τομή των γραμμών και στηλών $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$. Έστω επιπλέον και $\hat{x} \neq 0$ ένα διάνυσμα τάξης r. Κατασκευάζουμε στη συνέχεια το διάνυσμα x τάξης n τέτοιο ώστε

$$x_{i_k} = \hat{x}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

και όλες οι άλλες $n - r$ συνιστώσες του να είναι μηδέν. Τότε $x \neq 0$ και εύκολα διαπιστώνεται ότι $0 < x^T Ax = \hat{x}^T \hat{A} \hat{x}$ επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος. Άρα και ο $\hat{A}$ είναι θετικά ορισμένος. □

Από τα Θεωρήματα 3.4.1, 3.4.2 και 3.4.3 συνεπάγεται ότι για ένα θετικά ορισμένο πίνακα A υπάρχει μια LDU παραγοντοποίηση.

Θεώρημα 3.4.4. *Αν ο A είναι ένας $n \times n$ θετικά ορισμένος πίνακας τότε υπάρχει ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας L με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε*

$$A = LL^T \tag{3.90}$$

Απόδειξη. Επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος, συνεπάγεται από τα Θεωρήματα 3.4.1, 3.4.2 και 3.4.3 ότι υπάρχει μια LU παραγοντοποίηση του A, δηλαδή

$$A = LU$$

όπου ο L είναι ένας κάτω τριγωνικός και ο U ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος έπεται ότι $a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ (γιατί;). Επίσης από τον αλγόριθμο 3.3.1 έχουμε

$$l_{11} = u_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

Επειδή τώρα ο A είναι συμμετρικός έχουμε

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} = u_{1j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n \tag{3.91}$$

και τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του U είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα στοιχεία της πρώτης στήλης του L. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι $k < n$ και ότι τα στοιχεία των πρώτων k γραμμών του U είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα στοιχεία των πρώτων k στηλών του L. Η απόδειξη του θεωρήματος θα είναι πλήρης αν αποδειχθεί ότι τα στοιχεία της $k+1$ γραμμής του U είναι τα ίδια με τα στοιχεία της $k+1$ στήλης του L. Επειδή ο L είναι κάτω τριγωνικός και ο U είναι άνω τριγωνικός είναι φανερό ότι

$$l_{j,k+1} = 0 = u_{k+1,j}, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k.$$

Στη συνέχεια επειδή ο A είναι συμμετρικός έχουμε

$$l_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}\, u_{j,k+1}$$

ή

$$l_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}^2$$

και εκλέγουμε (βλ. βήμα 4.1 του αλγορίθμου 3.3.1)

$$l_{k+1,k+1} = u_{k+1,k+1} = \left(a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}^2 \right)^{1/2} . \tag{3.92}$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση της (3.92) είναι θετική. Πράγματι ο κύριος υποπίνακας A_{k+1} είναι θετικά ορισμένος λόγω του Θεωρήματος 3.4.3. Η ορίζουσα όμως ενός θετικά ορισμένου υποπίνακα είναι θετική καθόσον ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του. Έτσι

$$0 < \det{(A_{k+1})} = \det{(A_k)} l_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1}$$

ή επειδή $\det{(A_k)} > 0$,

$$l_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1} > 0$$

άρα η τιμή του $l_{k+1,k+1}$ που δίνεται από την (3.92) είναι ένας πραγματικός αριθμός και μπορεί να ληφθεί θετική. Επιπλέον (βλ. βήμα 4.2 του αλγόριθμου 3.3.1)

$$\begin{aligned} l_{p,k+1} &= \left(a_{p,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{pj}\, u_{j,k+1} \right) / \, u_{k+1,k+1} \\ &= \left(a_{k+1,p} - \sum_{j=1}^{k} u_{jp}\, l_{k+1,j} \right) / \, l_{k+1,k+1} \\ &= u_{k+1,p}, \quad p = k+2, k+2, \ldots, n. \ \square \end{aligned}$$

Η παραγοντοποίηση (3.90) είναι γνωστή σαν η μέθοδος του Choleski.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Να εφαρμοστεί η μέθοδος του Choleski.

Λύση

Καταρχήν υπολογίζονται τα στοιχεία της πρώτης στήλης του L ως εξής

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα στοιχεία της δεύτερης και τρίτης στήλης του L ως εξής

$$\begin{aligned} l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{1 - (-1/2)\cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

3.4.1 Ο αλγόριθμος του Choleski

Για την παραγοντοποίηση ενός θετικά ορισμένου $n \times n$ πίνακα A έχουμε τον παρακάτω αλγόριθμο

1. Διάβασε την τάξη n και τα στοιχεία $a_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$ του πίνακα A.
2. Να τεθεί $l_{11} = \sqrt{a}_{11}$
3. Για $j = 2, 3, \ldots, n$ να τεθεί $l_{j1} = a_{j1}/l_{11}$
4. Για $r = 2, 3, \ldots, n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 4.1-4.2

4.1 Να τεθεί

$$l_{rr} = \left[a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}^2 \right]^{1/2} . \tag{3.93}$$

4.2 Για $p = r + 1, r + 2, \ldots, n$ να υπολογιστούν

$$l_{pr} = \frac{1}{l_{rr}} \left[a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\, l_{rj} \right] . \tag{3.94}$$

5. Να τεθεί

$$l_{nn} = \left[a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}^2 \right]^{1/2} . \tag{3.95}$$

6. Να εκτυπωθούν τα $l_{rp},\ 1 \leq p \leq r,\ 1 \leq r \leq n$. Τέλος.

Παρατήρηση

Κατά την κωδικοποίηση του αλγόριθμου του Choleski θα πρέπει να ελέγχεται το πρόσημο της ποσότητας στην τετραγωνική ρίζα.

3.5 Η LU μέθοδος με μερική οδήγηση

Στην §3.3 διαπιστώσαμε ότι η τριγωνική διαχώριση και η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση είναι μαθηματικά ίδιες. Ωστόσο οι μέθοδοι εξακολουθούν να είναι ίδιες αν εφαρμοστεί η τεχνική της μερικής οδήγησης; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.1. *Για ένα $n \times n$ πίνακα A υπάρχει ένας μεταθετικός πίνακας P, ένας μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας L και ένας άνω τριγωνικός πίνακας U τέτοιος ώστε ο πίνακας PA να έχει την τριγωνική διαχώριση*

$$PA = LU \tag{3.96}$$

Απόδειξη. (βλ. [37] σελ. 127-129). □
Κατά την απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα της μερικής οδήγησης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της απαλοιφής είναι μαθηματικά ίδιο με την εφαρμογή της απαλοιφής του Gauss

χωρίς οδήγηση σε κάποιο πίνακα PA που λαμβάνεται από τον A μεταθέτοντας τις γραμμές του. Συνεπώς η μέθοδος της τριγωνικής διαχώρισης με μερική οδήγηση είναι ίδια με την παραγοντοποίηση του πίνακα PA. Επειδή δε $\det P \neq 0$ τα συστήματα $Ax = b$ και

$$PAx = Pb \tag{3.97}$$

είναι ισοδύναμα και δεν αλλάζει τίποτα αν αντί του A παραγοντοποιήσουμε τον PA. Ο Wilkinson [33] αποδεικνύει ότι η παρακάτω τεχνική παραγοντοποιεί τον PA χωρίς να είναι ανάγκη να γνωρίζουμε τον P εκ των προτέρων.

Όπως και στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση, εξετάζουμε την πρώτη στήλη του A και εκτελούμε μια εναλλαγή γραμμών αν το a_{11} δεν είναι το στοιχείο με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Στο σημείο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.78) και (3.79) για τον υπολογισμό της πρώτης γραμμής του U και της πρώτης στήλης του L, αντίστοιχα. Αν τα στοιχεία αυτά αποθηκευθούν στις αντίστοιχες θέσεις των στοιχείων του A θα έχουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c|c}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & b_1 & 0 \\ \hline
l_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 & 0 \\
l_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n & 0
\end{array}\right]$$

όπου η στήλη με τα μηδενικά θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού δεν χρησιμοποιούνται άνω δείκτες για τη δήλωση του εκάστοτε βήματος, ούτε δηλώνονται οι εναλλαγές των γραμμών. Το δεύτερο βήμα είναι ακριβώς το ίδιο με το r βήμα κατά το οποίο υπολογίζονται οι ποσότητες

$$s_r = a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jr}$$

$$\begin{array}{ccccl}
s_{r+1} & = & a_{r+1,r} & - & \sum_{j=1}^{r-1} l_{r+1,j}\, u_{jr} \\
\vdots & & \vdots & & \quad\vdots \\
s_n & = & a_{nr} & - & \sum_{j=1}^{r-1} l_{nj}\, u_{jr}
\end{array} \tag{3.98}$$

και τοποθετούνται στην τελευταία στήλη του επαυξημένου πίνακα. Έτσι αν $r = 2$ έχουμε

$$\left[\begin{array}{c|cccc|c|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & b_1 & 0 \\ \hline l_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 & s_2 \\ l_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n & s_n \end{array}\right].$$

Από τις (3.98) παρατηρούμε ότι αν $r = 1$ τότε

$$s_1 = a_{11}^{(1)},\ s_2 = a_{21}^{(1)}, \dots,\ s_n = a_{n1}^{(1)}.$$

Αν $r = 2$ τότε

$$\begin{aligned} s_2 &= a_{22}^{(1)} - l_{21}\, u_{12} \\ &= a_{22}^{(1)} + m_{21}\, a_{12}^{(1)} \\ &= a_{22}^{(2)} \end{aligned}$$

όμοια

$$s_3 = a_{32}^{(2)}, \dots, s_n = a_{n2}^{(2)}.$$

Άρα γενικά έχουμε

$$s_r = a_{rr}^{(r)}, \quad s_{r+1} = a_{r+1,r}^{(r)}, \dots, s_n = a_{nr}^{(r)} \tag{3.99}$$

οπότε η αναζήτηση για το οδηγό στοιχείο αναφέρεται στις ποσότητες s_i. Πιο συγκεκριμένα ο μικρότερος ακέραιος p για τον οποίο ισχύει

$$|s_p| = \max_{r \le i \le n} |s_i|$$

δηλώνει το οδηγό στοιχείο. Αν λοιπόν το s_r δεν είναι οδηγό στοιχείο τότε εναλλάσσουμε τις r και p $(r < p)$ γραμμές του επαυξημένου πίνακα έτσι ώστε το s_p να κατέχει την θέση του s_r. Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι

$$u_{rr} = s_r$$

και τα υπόλοιπα στοιχεία της r γραμμής του U υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u_{rp} = a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jp}, \quad p = r+1, r+2, \dots, n.$$

Όμοια τα στοιχεία της r στήλης του L δίνονται από τις

$$l_{pr} = s_p / u_{rr}, \quad p = r+1, r+2, \dots, n.$$

Παρατήρηση

Όταν εναλλάσσονται οι γραμμές του επαυξημένου πίνακα, εναλλάσσονται και οι γραμμές στον μερικώς υπολογισθέντα πίνακα L. Αυτό είναι φυσικό να γίνει, γιατί τα στοιχεία l_{ij} συνδέονται με τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής του Gauss και συνεπώς παρατηρούμε ότι μια πιθανή εναλλαγή γραμμών επηρεάζει όλα τα προηγούμενα βήματα.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να εφαρμοστεί η μέθοδος του Doolittle με μερική οδήγηση.

Λύση

Τριγωνική Διαχώριση

Εύρεση των πινάκων L και U τέτοιων ώστε

$$PA = LU$$

ή

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Για $r = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} p &= 1 \qquad & s_1 &= a_{11} = 2 \\ p &= 2 \qquad & s_2 &= a_{21} = 3 \\ p &= 3 \qquad & s_3 &= a_{31} = 1. \end{aligned}$$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$A^{(1)} = [A \vdots \mathrm{s}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_2| = \max\{|s_1|, |s_2|, |s_3|\} = \max\{|2|, |3|, |1|\} = |3|$$

άρα $i_1 = 2$, οπότε εναλλάσεται η $r = 1$ με τη $i_1 = 2$ γραμμή, δηλαδή

$$P_1 = I_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{A}^{(1)} = I_{12}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός της 1ης γραμμής του U και της 1ης στήλης του L

$$u_{11} = s_1 = 3, \quad u_{12} = a_{12} = 1, \quad u_{13} = a_{13} = 2$$

$$l_{21} = s_2/u_{11} = 2/3, \quad l_{31} = s_3/u_{11} = 1/3.$$

Άρα

$$\tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cccc} \multicolumn{1}{c}{u_{11} = 3} & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ \cline{1-3} l_{21} = 2/3 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & \vdots & s_2 \\ l_{31} = 1/3 & a_{32} = 2 & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 \end{array}\right].$$

Για $r = 2$ έχουμε

$$p = 2 \qquad s_2 = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - 2/3 \cdot 1 = 1/3$$

$$p = 3 \qquad s_3 = a_{32} - l_{31}u_{12} = 2 - 1/3 \cdot 1 = 5/3.$$

Άρα

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{c|cccc} \multicolumn{1}{c}{u_{11} = 3} & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ \cline{1-3} l_{21} = 2/3 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & \vdots & s_2 = 1/3 \\ l_{31} = 1/3 & a_{32} = 2 & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 = 5/3 \end{array}\right].$$

Επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_3| = \max\{|s_2|, |s_3|\} = \max\{|1/3|, |5/3|\} = 5/3$$

άρα $i_2 = 3$ οπότε εναλλάσεται η $r = 2$ με την $i_2 = 3$ γραμμή, δηλαδή

$$P_2 = I_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\tilde{A}^{(2)} = I_{23}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1/3 & 2 & 1 & \vdots & 5/3 \\ 2/3 & 1 & 1 & \vdots & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Υπολογισμός της 2ης γραμμής του U και της 2ης στήλης του L

$$u_{22} = s_2 = 5/3, \qquad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - 1/3 \cdot 2 = 1/3$$

$$l_{32} = s_3/u_{22} = 1/5.$$

Άρα

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 1/3 & \underline{u_{22} = 5/3} & \underline{u_{23} = 1/3} & \vdots & s_2 = 5/3 \\ l_{31} = 2/3 & \multicolumn{1}{c|}{l_{32} = 1/5} & a_{33} = 1 & \vdots & s_3 \end{array}\right].$$

Για $r = 3$ έχουμε

$p = 3 \qquad s_3 = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} - l_{32} \cdot u_{23} = 1 - 2/3 \cdot 2 - 1/5 \cdot 1/3 = -2/5.$

Υπολογισμός της 3ης γραμμής του U

$$u_{33} = s_3 = -2/5.$$

Άρα

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} u_{11} = 3 & u_{12} = 1 & u_{13} = 2 & \vdots & s_1 = 3 \\ l_{21} = 1/3 & u_{22} = 5/3 & u_{23} = 1/3 & \vdots & s_2 = 5/3 \\ l_{31} = 2/3 & l_{32} = 1/5 & \underline{u_{33} = -2/5} & \vdots & s_3 = -2/5 \end{bmatrix}.$$

οπότε είναι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix}$$

και ισχύει

$$LU = P_2P_1A.$$

Πράγματι

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_2P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς ισχύει

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU.$$

Επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \text{ ή } PAx = Pb$$

όπου

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b^{'} = Pb = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{3.100}$$

Αφού $PA = LU$ έχουμε ισοδύναμα ότι $LUx = Pb(= b^{'})$ ή

$$1.\ Ly = b^{'} \quad \text{και} \quad 2.\ Ux = y.$$

1. *Επίλυση του κάτω τριγωνικού συστήματος $Ly = b^{'}$ (με προς τα εμπρός αντικατάσταση)*

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 &&= 12 \\ y_2 &= b_2 - l_{12}y_1 &&= 3 - 1/3 \cdot 12 &&= -1 \\ y_3 &= b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 &&= 7 - 2/3 \cdot 12 - 1/5 \cdot (-1) &&= -4/5 \end{aligned}$$

ή

$$y = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -4/5 \end{bmatrix}.$$

2. *Επίλυση του άνω τριγωνικού συστήματος $Ux = y$ (με προς τα πίσω αντικατάσταση)*

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3/u_{33} &&= 2 \\ x_2 &= (y_2 - u_{23}x_3)/u_{22} &&= (-1 - 1/3 \cdot 2)/5/3 &&= -1 \\ x_1 &= (y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3)/u_{11} &&= (12 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)/3 &&= 3 \end{aligned}$$

ή

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.5.1 Ο αλγόριθμος της LU μεθόδου με μερική οδήγηση

Ο παρακάτω αλγόριθμος παραγοντοποιεί τον A σε LU με μερική οδήγηση και στη συνέχεια επιλύει τα συστήματα $Lz = b$ και $Ux = z$ όπου τα διαγώνια στοιχεία είτε του L ή του U είναι δεδομένα.

1. Διάβασε την τάξη n, τα στοιχεία a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$ του επαυξημένου πίνακα του A και τα στοιχεία l_{ii}, $1 \leq i \leq n$ του L ή τα στοιχεία u_{ii}, $1 \leq i \leq n$ του U.

2. Έστω p ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \leq p \leq n$ και

$$|a_{p1}| = \max_{1 \leq j \leq n} |a_{j1}|$$

(εύρεση του πρώτου οδηγού στοιχείου)

Αν $|a_{p1}| = 0$ τότε τύπωσε "Δεν υπάρχει μοναδική λύση". Τέλος.

3. Αν $p \neq 1$ τότε να εναλλαχθούν οι γραμμές p και 1 στον A.

4. Να επιλεγούν l_{11} και u_{11} τέτοια ώστε να ικανοποιείται η

$$l_{11}\, u_{11} = a_{11}$$

5. Για $j = 2, 3, \ldots, n$ να τεθεί

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}/l_{11} \quad \text{(πρώτη γραμμή του } U) \\ l_{j1} &= a_{j1}/u_{11} \quad \text{(πρώτη στήλη του } L) \end{aligned}$$

6. Για $r = 2, 3, \ldots, n-1$ να εκτελεσθούν τα βήματα 6.1-6.4.

   6.1 Έστω p ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $r \leq p \leq n$ και

$$|s_p| = \max_{r \leq k \leq n} \{|s_k|\},$$

όπου

$$s_k = a_{kr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{kj}\, u_{jr}$$

(εύρεση του οδηγού στοιχείου)

Αν $|s_p| = 0$, τότε τύπωσε "Δεν υπάρχει μοναδική λύση"

6.2 Αν $p \neq r$ τότε εναλλαγή των γραμμών p και r και στους δύο πίνακες A και L.

6.3 Να επιλεγούν l_{rr} και u_{rr} που να ικανοποιούν την

$$l_{rr}\,u_{rr} = a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\,u_{jr}$$

6.4 Για $p = r+1, r+2, \ldots, n$ να τεθεί

$$\begin{aligned} u_{rp} &= \left(a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\,u_{jp} \right) /l_{rr} \quad (r \text{ γραμμή του } U) \\ l_{pr} &= \left(a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\,u_{jr} \right) /u_{rr} \quad (r \text{ στήλη του } L) \end{aligned}$$

7. Να τεθεί

$$s_n = a_{nn} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{nj}\,u_{jn}$$

Αν $s_n = 0$ τότε τύπωσε "Δεν υπάρχει μοναδική λύση". Τέλος.

Να επιλεγούν l_{nn} και u_{nn} τέτοια ώστε να ικανοποιείται η

$$l_{nn}\,u_{nn} = a_{nn} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{nj}\,u_{jn}$$

(Τα βήματα 8 και 9 επιλύουν το κάτω τριγωνικό σύστημα $Lz = b$).

8. Να τεθεί

$$z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$$

9. Για $i = 2, 3, \ldots, n$ να τεθεί

$$z_i = \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,z_j \right) /\, l_{ii}$$

(Τα βήματα 10 και 11 επιλύουν το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = z$)

10. Να τεθεί

$$x_n = z_n / u_{nn}$$

11. Για $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ να τεθεί

$$x_i = \left(z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \right) \Big/ \, u_{ii}$$

12. Να τυπωθούν τα $x_i,\ 1 \leq i \leq n$. Τέλος.

3.5.2 Επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος

Ας θεωρήσουμε το τριδιαγώνιο σύστημα

$$\begin{array}{llllllcl}
b_1x_1 & +c_1x_2 & & & & & = & d_1 \\
a_2x_1 & +b_2x_2 & +c_2x_3 & & & & = & d_2 \\
 & a_3x_2 & +b_3x_3 & +c_3x_4 & & & = & d_3 \\
 & & \ldots\ldots & & & & & \\
 & & & \ldots\ldots & & & & \\
 & & & a_{n-1}x_{n-2} & +b_{n-1}x_{n-1} & +c_{n-1}x_n & = & d_{n-1} \\
 & & & & a_nx_{n-1} & +b_nx_n & = & d_n
\end{array} \tag{3.101}$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση. Είναι φανερό ότι η μέθοδος θα πρέπει να λάβει υπόψη της τη δομή του συστήματος προκειμένου να εξοικονομηθεί ουσιαστική υπολογιστική δουλειά. Παρατηρούμε ότι αν εφαρμοστεί η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss τότε θα προκύψει ένα άνω τριγωνικό σύστημα το οποίο θα έχει στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο και στη διαγώνιο που βρίσκεται άνω της κυρίας διαγωνίου. Με άλλα λόγια θα απαλειφθεί η διαγώνιος των a_i, δηλαδή σε κάθε βήμα της μεθόδου θα απαλείφεται μόνο ένα στοιχείο. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η διαγώνιος των c_i θα παραμείνει αμετάβλητη μετά το τέλος της απαλοιφής. Αν $b_1 \neq 0$ τότε ο x_1 απαλείφεται από την δεύτερη εξίσωση, σχηματίζοντας τον πολλαπλασιαστή

$$m_1 = -\frac{a_2}{b_1}$$

και παράγοντας τη νέα εξίσωση

$$b_2'x_2 + c_2x_3 = d_2'$$

όπου

$$b_2' = b_2 + m_1 c_1$$

και

$$d_2' = d_2 + m_1 d_1.$$

Όμοια αν $b_2' \neq 0$, ο x_2 μπορεί να απαλειφθεί από την τρίτη εξίσωση, αν ορισθεί ο πολλαπλασιαστής

$$m_2 = -\frac{a_3}{b_2'}$$

οπότε λαμβάνουμε τη νέα τρίτη εξίσωση

$$b_3' x_3 + c_3 x_4 = d_3'$$

όπου

$$b_3' = b_3 + m_2 c_2$$

και

$$d_3' = d_3 + m_2 d_2.$$

Συνεχίζοντας στο i-οστό βήμα, ο x_i θα απαλειφθεί από την $i+1$ εξίσωση, αν ορισθεί ο πολλαπλασιαστής

$$m_i = -\frac{a_{i+1}}{b_i'} \tag{3.102}$$

οπότε λαμβάνεται η νέα $i+1$ εξίσωση

$$b_{i+1}' x_{i+1} + c_{i+1} x_{i+2} = d_{i+1}' \tag{3.103}$$

όπου

$$b_{i+1}' = b_{i+1} + m_i c_i \tag{3.104}$$

και

$$d_{i+1}' = d_{i+1} + m_i d_i'. \tag{3.105}$$

Για $i = 1, 2, \ldots, n-1$ θα λάβουμε τελικά το σύστημα

$$\begin{array}{llllll} b_1'x_1+ & c_1x_2 & & & = & d_1' \\ & b_2'x_2+ & c_2x_3 & & = & d_2' \\ & \dots & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & b_{n-1}'x_{n-1}+ & c_{n-1}x_n & = & d_{n-1}' \\ & & & b_n'x_n & = & d_n' \end{array} \qquad (3.106)$$

όπου $b_1' = b_1$ και $d_1' = d_1$. Η λύση του ανωτέρω συστήματος είναι η

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{d_n'}{b_n'}, \quad b_n' \neq 0 \\ x_i &= (d_i' - c_i x_{i+1})/b_i', \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{aligned} \qquad (3.107)$$

με $b_i' \neq 0$.
Εύκολα λοιπόν προκύπτει ο αλγόριθμος.

1. Διάβασε την τάξη n του A, τα b_i, $1 \leq i \leq n$, c_i, $1 \leq i \leq n-1$, τα a_i, $2 \leq i \leq n$ και τα d_i, $1 \leq i \leq n$

2. Για $i = 1, 2, \dots, n-1$ να εκτελεστούν τα βήματα 2.1-2.3

   2.1 Να τεθεί

   $$m_i = -\frac{a_{i+1}}{b_i}$$

   2.2 Να τεθεί

   $$b_{i+1} = b_{i+1} + m_i c_i$$

   2.3 Να τεθεί

   $$d_{i+1} = d_{i+1} + m_i d_i$$

   (επίλυση του συστήματος)

3. Αν $b_n = 0$ τότε τύπωσε “Δεν υπάρχει μοναδική λύση”. Τέλος.

4. Να τεθεί

   $$x_n = \frac{d_n}{b_n}$$

5. Για $i = n-1, n-2, \dots, 1$ να τεθεί

$$x_i = (d_i - c_i x_{i+1})/b_i$$

6. Να τυπωθεί η λύση $x_i,\ 1 \le i \le n$. Τέλος.

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να επιλύσουμε ένα τριδιαγώνιο σύστημα με την LU μέθοδο. Παρατηρούμε ότι ο A έχει μόνο $(3n-2)$ μη μηδενικά στοιχεία, πράγμα που σημαίνει ότι το σύνολο των στοιχείων τόσο του L όσο και του U θα πρέπει να είναι επίσης $(3n-2)$. Αν υποθέσουμε ότι

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & & & & 0 \\ k_2 & l_2 & & & \\ & k_3 & l_3 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & k_n & l_n \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & & 0 \\ & 1 & u_2 & & & \\ & & 1 & u_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

τότε υπάρχουν $(2n-1)$ άγνωστα στοιχεία του L και $(n-1)$ άγνωστα στοιχεία του U, δηλαδή έχουμε $(3n-2)$ άγνωστα στοιχεία τα οποία μπορούν να προσδιοριστούν από την $A = LU$, η οποία δίνει τις εξισώσεις

$$\begin{array}{rclrclrcl} l_1 & = & b_1, & l_1 u_1 & = & c_1, & k_2 & = & a_2 \\ k_2\, u_1 + l_2 & = & b_2, & l_2 u_2 & = & c_2, & k_3 & = & a_3 \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \\ k_n\, u_{n-1} + l_n & = & b_n & & & & k_n & = & a_n \end{array} \tag{3.109}$$

ή

$$\begin{aligned} l_1 &= b_1 \\ u_1 &= c_1/l_1 \\ k_i &= a_i, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ l_i &= b_i - k_i\, u_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n \\ u_i &= c_i/l_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{3.110}$$

ή τελικά

$$\begin{aligned} l_1 &= b_1 \\ u_1 &= c_1/l_1 \\ l_i &= b_i - a_i\, u_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \\ u_i &= c_i/l_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Το σύστημα (3.101) τώρα γράφεται

$$LUx = d$$

ή

$$Lz = d \tag{3.112}$$

και

$$Ux = z. \tag{3.113}$$

Η λύση του (3.112) δίνεται από τους τύπους

$$\begin{aligned} z_1 &= d_1/l_1 \\ z_i &= (d_i - a_i\, z_{i-1})/l_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{3.114}$$

ενώ η λύση του (3.113) είναι η

$$\begin{aligned} x_n &= z_n \\ x_i &= z_i - u_i\, x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Παράδειγμα

Έστω το τριδιαγώνιο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Να επιλυθεί το ανωτέρω σύστημα με τη μέθοδο του Crout.

Λύση

Έχουμε ότι

$n = 4,\ b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 2,\ a_2 = a_3 = a_4 = -1,\ c_1 = c_2 = c_3 = -1$ και $d_1 = 1,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0$ και $d_4 = 1$

Από την (3.111) έχουμε διαδοχικά $l_1 = 2, \quad u_1 = -1/2.$

Για $i = 2$

$$\begin{aligned} l_2 &= b_2 - a_2\,u_1 = 2 - (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ u_2 &= c_2/l_2 = -1/\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Για $i = 3$

$$\begin{aligned} l_3 &= b_3 - a_3\,u_2 = 2 - (-1)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \\ u_3 &= c_3/l_3 = -1/\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Επίσης για $i = 4$

$$l_4 = b_4 - a_4\,u_3 = 2 - (-1)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

Η (3.114) δίνει διαδοχικά τα ακόλουθα

$$z_1 = d_1/l_1 = 1/2.$$

Για $i = 2, 3, 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{d_2 - a_2\,z_1}{l_2} = \frac{0 - (-1)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3} \\ z_3 &= \frac{d_3 - a_3\,z_2}{l_3} = \frac{0 - (-1)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{4} \\ z_4 &= \frac{d_4 - a_4\,z_3}{l_4} = \frac{1 - (-1)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)} = 1. \end{aligned}$$

Τέλος από την (3.115) έχουμε

$$x_4 = z_4 = 1$$

και για $i = 3, 2, 1$

$$\begin{aligned} x_3 &= z_3 - u_3\, x_4 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 1 = 1 \\ x_2 &= z_2 - u_2\, x_3 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 1 = 1 \\ x_1 &= z_1 - u_1\, x_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος έδωσε την ακριβή λύση $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

3.5.3 Αλγόριθμος της μεθόδου Crout για την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος

1. Διάβασε την τάξη n του A, τα $b_i,\ 1 \leq i \leq n$, τα $a_i,\ 2 \leq i \leq n$, τα $c_i,\ 1 \leq i \leq n-1$ και τα $d_i,\ 1 \leq i \leq n$

2. Να τεθεί

   $$l_1 = b_1$$

   και

   $$u_1 = c_1 / l_1$$

3. Για $i = 2, 3, \ldots, n-1$ να τεθεί

   $$\begin{aligned} l_i &= b_i - a_i\, u_{i-1} \\ u_i &= c_i / l_i \end{aligned}$$

4. Να τεθεί

   $$l_n = b_n - a_n\, u_{n-1}$$

   (Τα βήματα 5 και 6 επιλύουν το $Lz = d$).

5. Να τεθεί

   $$z_1 = d_1 / l_1$$

6. Για $i = 2, 3, \ldots, n$ να τεθεί

   $$z_i = (d_i - a_i\, z_{i-1}) \,/\, l_i$$

   (Τα βήματα 7 και 8 επιλύουν το $Ux = z$).

7. Να τεθεί
$$x_n = z_n$$

8. Για $i = n-1, n-2, \dots, 1$ να τεθεί
$$x_i = z_i - u_i\, x_{i+1}$$

9. Να τυπωθεί η λύση $x_i, \quad 1 \leq i \leq n$. Τέλος.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω A ο τριδιαγώνιος πίνακας του συστήματος (3.112) με $a_i, c_i \neq 0$ για $i = 2, 3, \dots, n-1$. Αν $|b_1| > |c_1|,\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ για $i = 2, 3, \dots, n-1$ και $|b_n| > |a_n|$, τότε $det A \neq 0$ και **i**)$|u_i| < 1$, **ii**)$|c_i| < |l_i| < |b_i| + |a_i|$.*

Απόδειξη. Από τις (3.111) έχουμε
$$|u_1| = \frac{|c_1|}{|l_1|} = \frac{|c_1|}{|b_1|} < 1.$$
Υποθέτοντας τώρα ότι $|u_{i-1}| < 1$ αρκεί να δειχθεί ότι $|u_i| < 1$.
Πράγματι πάλι από τις (3.111) έχουμε
$$u_i = \frac{c_i}{l_i} = \frac{c_i}{b_i - a_i\, u_{i-1}}$$

ή

$$|u_i| \leq \frac{|c_i|}{||b_i| - |a_i||u_{i-1}||} < \frac{|c_i|}{|b_i| - |a_i|},\ |u_{i-1}| < 1$$
λόγω της υπόθεσης όμως
$$|u_i| < \frac{|c_i|}{|b_i| - |a_i|} < \frac{|c_i|}{|c_i|} = 1.$$
Για την απόδειξη του **ii**) έχουμε από τις (3.111) ότι
$$|l_i| = |b_i - a_i\, u_{i-1}|.$$

Αλλά

$$|b_i - a_i\, u_{i-1}| \leq |b_i| + |a_i\, u_{i-1}| < |b_i| + |a_i|.$$

Επίσης

$$|b_i - a_i\, u_{i-1}| \geq ||b_i| - |a_i\, u_{i-1}|| > ||b_i| - |a_i|| \geq |c_i|.$$

Λόγω όμως των δύο παραπάνω σχέσεων ισχύει το (ii) του θεωρήματος. Επιπλέον

$$detA = [detL][detU] = \prod_{i=1}^{n} l_i$$

επειδή δε λόγω του (ii) $l_i \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ έπεται ότι και $detA \neq 0$. □

3.5.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Για τον υπολογισμό του πλήθους των πράξεων της LU μεθόδου θα πρέπει να ανατρέξουμε στον αλγόριθμο της μεθόδου (βλ. §3.3.1). Έτσι αν υποθέσουμε ότι θεωρούμε τη μέθοδο του Doolittle τότε

$$u_{1j} = a_{1j}$$

και

$$l_{j1} = a_{j1}/u_{11}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

οπότε για τον υπολογισμό των l_{j1} απαιτούνται $n-1$ διαιρέσεις.
Επίσης για τον υπολογισμό του

$$u_{rr} = a_{rr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jr}$$

απαιτούνται $r-1$ πολλαπλασιασμοί και $r-1$ προσθαφαιρέσεις ή συνολικά για όλα τα $u_{rr},\ r = 2, 3, \ldots, n$

$$\sum_{r=2}^{n} (r-1) \quad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Για τον υπολογισμό των

$$u_{rp} = a_{rp} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}\, u_{jp}, \quad p = r+1, r+2, \ldots, n$$

απαιτούνται

$$(n-r)(r-1) \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \\ \text{ή προσθαφαιρέσεις}$$

ή συνολικά

$$\sum_{r=2}^{n-1}(n-r)(r-1) \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \\ \text{ή προσθαφαιρέσεις}$$

Ο υπολογισμός των

$$l_{pr} = \left(a_{pr} - \sum_{j=1}^{r-1} l_{pj}\, u_{jr}\right) \,/\, u_{rr}, \qquad p = r+1, r+2, \ldots, n$$

απαιτεί το ίδιο πλήθος πολλαπλασιασμών και προσθαφαιρέσεων για τα u_{rp} και επιπλέον $(n-r)$ διαιρέσεις ή συνολικά

$$\sum_{r=2}^{n-1}(n-r) \qquad \text{διαιρέσεις}\ .$$

Συνοψίζοντας η παραγοντοποίηση του A απαιτεί

$$2\sum_{r=2}^{n-1}(n-r)(r-1) + \sum_{r=2}^{n}(r-1) \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \qquad (3.116) \\ \text{ή προσθαφαιρέσεις}$$

και

$$\sum_{r=2}^{n-1}(n-r) + n - 1 \qquad \text{διαιρέσεις}\ .$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\sum_{r=2}^{n}(r-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

$$\sum_{r=2}^{n-1}(n-r)(r-1) = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

και

$$\sum_{r=2}^{n-1}(n-r)=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}+1.$$

Άρα οι τύποι (3.116) γίνονται

$$\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.117}$$

ή προσθαφαιρέσεις

και

$$\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} \qquad \text{διαιρέσεις} \; .$$

Τέλος για τον υπολογισμό της λύσης του $Ly = b$ που δίνεται από τους τύπους

$$y_1 = b_1$$

και

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j, \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

απαιτούνται

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \quad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

ή προσθαφαιρέσεις

ή

$$\frac{n^2}{n}-\frac{n}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.118}$$

ή προσθαφαιρέσεις

Για τη λύση του $Ux = y$ που δίνεται από τους τύπους

$$\begin{aligned} &x_n = y_n / x_{nn} \\ &x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij}\, x_j \right) \Big/ \, u_{ii}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \end{aligned}$$

απαιτούνται

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \quad \text{πολλαπλασιασμοί}$$

ή προσθαφαιρέσεις

και

$$n \qquad \text{διαιρέσεις}$$

ή

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{πολλαπλασιασμοί} \tag{3.119}$$

ή προσθαφαιρέσεις

$$n \qquad \text{διαιρέσεις}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.117), (3.118) και (3.119) έχουμε ότι η επίλυση ενός συστήματος με την μέθοδο του Doolittle απαιτεί

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \qquad \text{πολλαπλασιασμούς} \tag{3.120}$$

ή προσθαφαιρέσεις

και

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad \text{διαιρέσεις}$$

δηλαδή ακριβώς το ίδιο πλήθος και είδος πράξεωνμε τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

3.6 Norms διανυσμάτων και πινάκων

Για την ποσοτική ανάλυση του σφάλματος της λύσης του $Ax = b$ είναι αναγκαίο να έχουμε κάποιο μέτρο του μεγέθους του. Με άλλα λόγια επιθυμούμε να ορίσουμε ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό (norm) για κάθε διάνυσμα όπως έχουμε την απόλυτη τιμή για κάθε αριθμό. Ας θεωρήσουμε πρώτα τις norms διανύσματος.

Μια norm διανύσματος $\|.\|$ είναι μια συνάρτηση με πραγματικές και μη αρνητικές τιμές στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\text{i)}\|x\| > 0 \text{ αν } x \neq 0, \quad \|x\| = 0 \text{ αν } x = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{C}^n \\
&\text{ii)}\|cx\| = |c| \cdot ||x|| \quad \text{για κάθε } c \in \mathbb{C} \text{ και } x \in \mathbb{C}^n \qquad (3.121)\\
&\text{iii)}\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ για } x, y \in \mathbb{C}^n \text{ (τριγωνική ανισότης)}
\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.6.1. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$ ισχύει*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \qquad (3.122)$$

Απόδειξη. Από την ιδιότητα (iii) των norms έχουμε

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

ή

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Όμοια λαμβάνουμε

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

λόγω όμως της ιδιότητας (ii) με $c = -1$ τα δεύτερα μέλη των δύο τελευταίων ανισοτήτων είναι ίσα, άρα η (3.122) ισχύει. □

Είναι φανερό ότι υπάρχουν άπειρες διανυσματικές norms από τις οποίες θα θεωρήσουμε μόνο τις $l_p -$ norms (Holder norms) που δίνονται από τον παρακάτω γενικό τύπο

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, & p = 1, 2, 3, \ldots \\ \underset{i}{max}\, |x_i|, & p = \infty. \end{cases} \qquad (3.123)$$

Οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες norms είναι οι l_1, l_2 και l_∞. Συνεπώς θα περιοριστούμε μόνο στις ακόλουθες norms

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{Αθροιστική norm} \\ \|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{Ευκλείδια norm} \\ \|x\|_\infty &= \underset{i}{max} |x_i| \qquad \text{Μέγιστη norm.} \end{aligned} \tag{3.124}$$

Θεώρημα 3.6.2. *Να αποδειχθεί ότι οι $l_p -$ norms για $p = 1, 2, \infty$ είναι norms διανυσμάτων.*

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.
Υπόδειξη: για $p = 2$ να χρησιμοποιηθεί η ανισότητα
$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right]^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. □

Είναι αναγκαίο όμως να έχουμε επίσης και ένα μέτρο του μεγέθους ενός πίνακα. Έστω λοιπόν $\mathbb{C}^{n \times n}$ το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, τότε μια norm πίνακα είναι μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές $\| \cdot \|$ ορισμένη στο $\mathbb{C}^{n \times n}$ που έχει τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &\text{i)} \|A\| > 0, \text{ εκτός αν } A = 0 \text{ οπότε } \|A\| = 0 \\ &\text{ii)} \|cA\| = |c| \; \|A\| \text{ όπου } c \text{ βαθμωτό μέγεθος} \\ &\text{iii)} \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ &\text{iv)} \|AB\| \leq \|A\| \; \|B\|. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Όπως με τις διανυσματικές norms υπάρχουν διάφορες μέθοδοι δημιουργίας norms πινάκων. Οι norms πινάκων που αντιστοιχούν στις διανυσματικές norms καλούνται *φυσικές* norms πινάκων και είναι αυτές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στις εφαρμογές.

Ορισμός. Έστω $|| \cdot ||_a$ μια διανυσματική norm. Η συνάρτηση $|| \cdot ||_a$ πραγματικών τιμών, η οποία ορίζεται για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ από τον τύπο

$$||A|| = \max_{||x||_a \neq 0} \frac{||Ax||_a}{||x||_a} \tag{3.126}$$

καλείται η φυσική norm που αντιστοιχεί στη διανυσματική norm $||\cdot||_a$.

Από την (3.126) συνεπάγεται ότι

$$||A|| \geq \frac{||Ax||_a}{||x||_a}$$

ή ισοδύναμα ότι

$$||Ax||_a \leq ||A|| \cdot ||x||_a. \qquad (3.127)$$

Θεώρημα 3.6.3. *Η φυσική norm πίνακα που αντιστοιχεί στη διανυσματική norm $||\cdot||_a$ είναι μια norm πίνακα.*

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη. ☐

Παραδείγματα

1. Να δειχτεί ότι οι εκφράσεις $||x||_1$, $||x||_2$ και $||x||_\infty$ μπορούν να οριστούν σαν norms ενός διανύσματος $x \in \mathbb{R}^n$.

Λύση

Έχουμε

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \;\; ||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}, \;\; ||x||_\infty = \max_i |x_i|.$$

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $||x_1|| > 0$ εκτός αν $x = 0$, οπότε εύκολα βλέπουμε ότι $||x||_1 = 0$.

(ii)

$$||cx||_1 = \sum_{i=1}^{n} |cx_i| = |c| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |c|||x||_1.$$

(iii)

$$||x+y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i| \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1.$$

Ανάλογα εργαζόμενοι μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο για την $||x||_\infty$. Τώρα για την $||x||_2$ αποδεικνύουμε μόνο την (iii). Πρώτα αποδεικνύουμε την ανισότητα του Scwartz.

$$|(x, y)| \leq ||x||_2||y||_2.$$

Έχουμε

$$||x||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = (x,x)$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} 0 \le ||x+ay||_2^2 &= (x+ay, x+ay) = (x,x) + (x,ay) + (ay,x) + (ay,ay) \\ &= ||x||_2^2 + a(x,y) + \bar{a}\overline{(x,y)} + \bar{a}a||y||_2^2. \end{aligned}$$

Αν $(x,y) = 0$ τότε έχουμε ταυτότητα. Όταν $(x,y) \neq 0$ θέτουμε $a = -||x||_2^2/(x,y)$ και τελικά έχουμε

$$0 \le ||x||_2^2 - \frac{||x||_2^2}{(x,y)}(x,y) - \overline{\frac{||x||_2^2}{(x,y)}}\overline{(x,y)} + \frac{||x||_2^4}{(x,y)\overline{(x,y)}}||y||_2^2$$

ή

$$0 \le -||x||_2^2 + \frac{||x||_2^4||y||_2^2}{|(x,y)|^2}$$

ή

$$|(x,y)| \le ||x||_2||y||_2.$$

Για την απόδειξη της (iii) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι μικρότερο ή ίσο του μέτρου του, έτσι

$$\begin{aligned} ||x+y||_2^2 &= ||x||_2^2 + (x,y) + \overline{(x,y)} + ||y||_2^2 = ||x||_2^2 + 2Re(x,y) + ||y||_2^2 \\ &\le ||x||_2^2 + 2|(x,y)| + ||y||_2^2 \le ||x||_2^2 + 2||x||_2||y||_2 + ||y||_2^2 \\ &= (||x||_2^2 + ||y||_2^2)^2. \end{aligned}$$

2. Αν $x \in \mathbb{C}^n$ να δειχτεί ότι

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_2 \le ||x||_\infty \le ||x||_2$ **(iii)** $\frac{1}{n}||x||_1 \le ||x||_\infty \le ||x||_1$

(ii) $||x||_2 \le ||x||_1 \le \sqrt{n}||x||_2$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \le ||x||_2 \le ||x||_1$.

Λύση

Παρατηρούμε εύκολα ότι

$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le n||x||_\infty \tag{3.128}$$

και

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty. \tag{3.129}$$

Από την ανισότητα του Schwartz για διανύσματα με στοιχεία $|x_i|$ και 1 αντίστοιχα λαμβάνουμε

$$||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2. \tag{3.130}$$

Επίσης, εύκολα διαπιστώνεται ότι ισχύει

$$||x||_2^2 \leq ||x||_1^2. \tag{3.131}$$

Από τις (3.130) και (3.131) λαμβάνουμε την (ii). Επίσης, από την (3.129) προκύπτει

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \ \text{ και } \ \frac{1}{\sqrt{n}}||x||_2 \leq ||x||_\infty$$

και αποδεικνύεται η ισχύς της (i). Από την (ii) έχουμε

$$||x||_2 \leq ||x||_1 \ \text{ και } \ \frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq ||x||_2$$

άρα ισχύει η (iv). Τέλος, από τις (i) και (iv) έχουμε

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$$

και

$$\frac{1}{n}||x||_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}||x||_1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}||x||_2 \leq ||x||_\infty$$

που αποδεικνύουν την (iii). Στην ουσία συνεπώς οι 1,2 και ∞ norms είναι ισοδύναμες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οποιεσδήποτε δύο norms $|| \cdot ||$ σε ένα πεπερασμένο χώρο είναι ισοδύναμες με την έννοια ότι υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 για τις οποίες $c_1||x|| \leq |||x||| \leq c_2||x||$ για όλα τα x.

3. Αν $x, y \in C^n$ να δειχτεί

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Λύση

Πρώτα θεωρούμε την 1-norm κι έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \|x-y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \geq \sum_{i=1}^n ||x_i| - |y_i|| = |\sum_{i=1}^n |x_i| - \sum_{i=1}^n |y_i|| \\ &= |||x||_1 - ||y||_1|. \end{aligned}$$

Για την ∞-norm έχουμε

$$\begin{aligned} \|x-y\|_\infty &= \max_i |x_i - y_i| \geq \max_i ||x_i| - |y_i|| = |\max_i |x_i| - \max_i |y_i|| \\ &= |||x||_1 - ||y||_1|. \end{aligned}$$

Τέλος για την 2-norm έχουμε

$$\begin{aligned} \|x-y\|_2^2 &= ||x||_2^2 - (x,y) - \overline{(x,y)} + ||y||_2^2 \\ &= ||x||_2^2 - 2Re(x,y) + ||y||_2^2 \\ &\geq ||x||_2^2 - 2|(x,y)| + ||y||_2^2 \\ &\geq ||x||_2^2 - 2||x||_2||y||_2 + ||y||_2^2 \\ &= (||x||_2 - ||y||_2)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|x-y\|_2^2 \geq |||x||_2 - ||y||_2|^2.$$

Θεώρημα 3.6.4. *Οι τρεις norms πινάκων που αντιστοιχούν στις διανυσματικές norms δίνονται από τους τύπους*

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= [\rho(A^H A)]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.132}$$

και

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

όπου $\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|$ *με* λ_i *ιδιοτιμές του* A *και* A^H *είναι ο συζυγής ανάστροφος του* A.

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη. ☐
Η $\rho(A)$ καλείται φασματική ακτίνα του A και ο ρόλος της είναι σημαντικός όπως θα διαπιστωθεί στη συνέχεια (βλ. Κεφ. 4).
Τόσο οι διανυσματικές όσο και οι norms πινάκων συνδέονται άμεσα με την σύγκλιση ακολουθιών διανυσμάτων και πινάκων. Μια ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}, k = 0, 1, 2, \dots$ με συνιστώσες $\{x_i^{(k)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχει όριο το μηδενικό διάνυσμα ή συγκλίνει στο μηδενικό διάνυσμα αν και μόνον αν οι ακολουθίες $\{x_i^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ για $i = 1, 2, \dots, n$ έχουν όριο το μηδέν, γράφουμε δε τότε

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = 0 \qquad \text{ή} \qquad x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Θεώρημα 3.6.5. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η*

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

είναι η

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| = 0.$$

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη. ☐

Όμοια μια ακολουθία πινάκων $\{A^{(k)}\},\ k = 0, 1, 2, \dots$ με στοιχεία $\{a_{ij}^{(k)}\},\ i, j = 1, 2, \dots, n$ έχει όριο το μηδενικό πίνακα ή συγκλίνει στο μηδενικό πίνακα αν και μόνον αν οι n^2 ακολουθίες $\{a_{ij}^{(k)}\},\ k = 0, 1, 2, \dots$ για $i, j = 1, 2, \dots, n$ έχουν όριο το μηδέν, γράφουμε τότε

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \quad \text{ή} \quad A^{(k)} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Θεώρημα 3.6.6. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η*

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$$

είναι η

$$\lim_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0.$$

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση. ☐

Θεώρημα 3.6.7. *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η ακολουθία των διαδοχικών δυνάμεων ενός πίνακα A τάξης n, στο μηδενικό πίνακα, δηλαδή $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0$ είναι η*

$$\rho(A) < 1. \tag{3.133}$$

Απόδειξη. (βλ. [36]) ☐

Θεώρημα 3.6.8. *Για κάθε πίνακα τάξης n ισχύει*

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Απόδειξη. Για $k = 0,\ 1$ ισχύει η ισότητα. Για $k > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|A^k\| &= \|A^{k-1}A\| \leq \|A^{k-1}\|\ \|A\| = \|A^{k-2}A\|\ \|A\| \\ &\leq \|A^{k-2}\|\ \|A\|^2 \leq \cdots \leq \|A\|^k. \ \square \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.6.9. *Ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση της ακολουθίας των διαδοχικών δυνάμεων ενός πίνακα A τάξης n στο μηδενικό πίνακα, δηλαδή $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0$ είναι η*

$$\|A\| < 1.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.6.6 έχουμε ότι $\underset{k\to 0}{lim}\ A^k = 0$ αν $\underset{k\to\infty}{lim}\|A^k\| = 0$ αλλά λόγω του Θεωρήματος 3.6.8 αρκεί $\underset{k\to\infty}{lim}\|A\|^k = 0$, η οποία για να ισχύει θα πρέπει $\|A\| < 1$. $\square$

Θεώρημα 3.6.10. *Για κάθε πίνακα A τάξης n ισχύει*

$$\rho(A) \leq \|A\|. \tag{3.134}$$

Απόδειξη. Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα τότε

$$Ax = \lambda x$$

οπότε λαμβάνοντας τις norms των δύο μελών έχουμε

$$\|Ax\| = \|\lambda x\|$$

ή εφαρμόζοντας ιδιότητες των norms

$$|\lambda|\ \|x\|\ \leq \|A\|\ \|x\|$$

ή

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

συνεπώς

$$\rho(A) = \max|\lambda|\ \leq \|A\|. \ \square$$

Θεώρημα 3.6.11. *Η σειρά*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = I + A + A^2 + \cdots + A^m + \ldots$$

συγκλίνει αν και μόνον αν $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$. *Στην περίπτωση σύγκλισης της σειράς έχουμε*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I-A)^{-1}.$$

Απόδειξη. (i) Ας υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$ τότε από το Θεώρημα 3.6.7 έχουμε ότι $\rho(A) < 1$ και $\lambda = 1$ δεν είναι ιδιοτιμή του A. Αυτό σημαίνει ότι $det(I-A) \neq 0$ και ο $(I-A)^{-1}$ υπάρχει. Θεωρούμε στη συνέχεια την ταυτότητα

$$(I-A)(I + A + A^2 + \cdots + A^m) \equiv I - A^{m+1}$$

από την οποία έχουμε

$$I + A + A^2 + \cdots + A^m \equiv (I-A)^{-1} - (I-A)^{-1}A^{m+1}.$$

Ο δεύτερος όρος του δεύτερου μέλους τείνει στο μηδενικό πίνακα άρα

$$I + A + A^2 + \cdots + A^m \underset{m\to\infty}{\to} (I-A)^{-1}.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι

$$s^{(m)} = I + A + A^2 + \cdots + A^m \underset{m\to\infty}{\to} (I-A)^{-1}$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$s_{ij}^{(m)} \to (I-A)_{ij}^{-1}, \quad m \to \infty$$

δηλαδή οι n^2 σειρές $s_{ij}^{(m)}$ πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών συγκλίνουν. Μια αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση μιας τέτοιας σειράς είναι το m-ιοστό στοιχείο στο άθροισμα να τείνει στο μηδέν. Συνεπώς για όλα τα i και j έχουμε $(A^m)_{ij} \to 0$ για $m \to \infty$ που σημαίνει $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$. □

Πόρισμα 3.6.1.

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I-A)^{-1} \quad \text{αν και μόνον αν}$$

$$\rho(A) < 1.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 3.6.7 και 3.6.11. □

Πόρισμα 3.6.2. *Αν υπάρχει τουλάχιστον μια norm πίνακα για την οποία* $\|A\| < 1$ *τότε*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I - A)^{-1}.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 3.6.9 και 3.6.11.□

Θεώρημα 3.6.12. *Αν* $\|A\| < 1$ *για κάποια norm πίνακα τότε οι πίνακες* $I - A$ *και* $I + A$ *είναι μη ιδιάζοντες και ισχύουν οι σχέσεις*

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \|(I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|} \tag{3.135}$$

και

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \|(I + A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3.136}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.6.10 έχουμε $\rho(A) \le \|A\| < 1$ άρα η $\lambda = \pm 1$ δεν είναι ιδιοτιμή του A συνεπώς $det(I \pm A) \ne 0$ και οι πίνακες $I \pm A$ είναι μη ιδιάζοντες. Για την απόδειξη της (3.135) ξεκινούμε από τη γνωστή σχέση

$$I = (I - A)(I - A)^{-1}.$$

Λαμβάνοντας τις norms των δύο μελών έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} 1 = \|I\| &= \|(I - A)(I - A)^{-1}\| \le \|I - A\| \, \|(I - A)^{-1}\| \\ &\le (\|I\| + \| - A\|) \, \|(I - A)^{-1}\| = (1 + \|A\|) \, \|(I - A)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Από το πρώτο και τελευταίο μέλος των ανωτέρω σχέσεων προκύπτει η αριστερή σχέση των (3.135). Επίσης

$$(I - A)^{-1} = (I - A + A)(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1}$$

και λαμβάνοντας τις norms έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \|(I - A)^{-1}\| &= \|I + A(I - A)^{-1}\| \\ &\le \|I\| + \|A(I - A)^{-1}\| \\ &\le 1 + \|A\| \, \|(I - A)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Από το πρώτο και τελευταίο μέλος λαμβάνουμε, έχοντας υπόψη ότι $\|A\| < 1$, τη δεξιά σχέση των (3.135). Αν τώρα στις (3.135) θέσουμε όπου A το $-A$ τότε λαμβάνουμε τις (3.136). □

3.7 Ασταθή συστήματα

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, με τη μερική οδήγηση αποφεύγουμε το πρόβλημα της συσσώρευσης σφαλμάτων στρογγύλευσης. Υπάρχει όμως ακόμη το πρόβλημα των σφαλμάτων στην περίπτωση που το σύστημα

$$Ax = b$$

είναι ασταθές, δηλαδή όταν η λύση του επηρεάζεται δραστικά από μικρές διαταραχές στα στοιχεία του επαυξημένου πίνακα

$$B = [A, b].$$

Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι ασταθές, τότε είναι αναπόφευκτη μια προοδευτική απώλεια σημαντικών ψηφίων κατά τη διάρκεια των υπολογισμών με αποτέλεσμα την απώλεια της ακρίβειας της λύσης. Μπορούμε όμως στην περίπτωση αυτή να δεχτούμε ότι το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε είναι η ακριβής λύση ενός ελαφρά διαταραγμένου συστήματος. Έτσι λοιπόν υποθέτουμε ότι στο σύστημα που δίνεται υπάρχουν αρχικά σφάλματα τόσο στον πίνακα A όσο και στο διάνυσμα b. Έστω δA και δb οι διαταράξεις στον A και b, αντίστοιχα. Τότε, με την προϋπόθεση ότι δεν εισχωρούν νέα σφάλματα κατά την επίλυση, αντί για την ακριβή τιμή του διανύσματος x, θα βρίσκουμε ένα διάνυσμα που θα περιέχει μία διατάραξη δx. Έτσι θα έχουμε το διαταραγμένο σύστημα

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \tag{3.137}$$

και είναι δυνατόν να βρούμε το ακόλουθο φράγμα για την σχετική αλλαγή στη λύση.

Θεώρημα 3.7.1. *Έστω ο μη ιδιάζων πίνακας A με*

$$\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1 \tag{3.138}$$

τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa}{1 - \|\delta A\| \, \|A^{-1}\|} \left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right] \tag{3.139}$$

όπου

$$\kappa = \kappa(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|. \tag{3.140}$$

Απόδειξη. Από την (3.137) έχουμε

$$(A + \delta A)\,\delta x = \delta b - \delta A x$$

Για να λύσουμε ως προς δx θα πρέπει να αποδείξουμε πρώτα ότι ο πίνακας $A + \delta A = A(I + A^{-1}\,\delta A)$ είναι μη ιδιάζων. Έχουμε όμως ότι

$$\rho(A^{-1}\delta A) \leq \|A^{-1}\delta A\| < 1$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της (3.138), άρα ο $I + A^{-1}\delta A$ είναι μη ιδιάζων. Συνεπώς

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

και λαμβάνοντας τις norms των δύο μελών έχουμε

$$\begin{aligned}\|\delta x\| &= \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)\| \\ &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\|\ \|A^{-1}\|\ \|(\delta b - \delta A x)\|.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.6.12 όμως, επειδή $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\ \|\delta A\| < 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\ \|\delta A\|}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\|\delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\ \|\delta A\|}[\|\delta b\| + \|\delta A\|\ \|x\|]$$

ή

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\ \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\ \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\ \|x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Αλλά $Ax = b$ και $\|b\| \leq \|A\|\ \|x\|$ άρα

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\ \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\ \|\delta A\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right). \quad \square$$

Πόρισμα 7.2 Αν $\delta A = 0$ τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\ \|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Πόρισμα 7.3 Αν $\delta b = 0$ τότε

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|A\|\ \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\ \|\delta A\|} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Παρατηρήσεις

1. Αν η διαταραχή δA είναι πολύ μικρή, τότε από το Πόρισμα 7.2 (όπου $\delta A = 0$), η σχετική αλλαγή στη λύση είναι φραγμένη από την ποσότητα $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\,\|A\|$.

2. Αν $\kappa(A)$ είναι μικρό, τότε μια μικρή διαταραχή του A ή μια μικρή διαταραχή του b ή μικρές διαταραχές των A και b δεν επιτρέπουν μεγάλες αλλαγές στη λύση x.

3. $\kappa = \|A^{-1}\|\,\|A\| \geq \|A^{-1}\,A\| = \|I\| = 1$.

Ορισμός. Αν ο A είναι μη ιδιάζων, τότε

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{3.141}$$

είναι ο αριθμός συνθήκης για το σύστημα $Ax = b$.

Αν $\kappa(A)$ είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε μικρές διαταραχές του A ή b είναι δυνατόν να προκαλέσουν μεγάλες διαταραχές στη λύση x του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι ασταθές (ill-conditioned).

Θεώρημα 3.7.2. *Αν ο A είναι πραγματικός και συμμετρικός, τότε*

$$\kappa(A) = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|, \tag{3.142}$$

όπου λ_1 και λ_n είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη κατά απόλυτο τιμή ιδιοτιμές του A, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Αφήνεται σαν άσκηση. □

3.8 Ασκήσεις

1. Για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα να υπολογιστεί η λύση τους με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

   (α)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

(β)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 & + & 2x_2 & + & \frac{12}{5}x_3 & = & \frac{1}{10} \end{array}$$

(γ)

$$\begin{array}{rrcrcrcr} & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ - & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{array}$$

(δ)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

(ε)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 6x_1 & & & + & 9x_3 & - & 2x_4 & = & 13 \\ -12x_1 & & & - & 10x_3 & + & 5x_4 & = & -17 \\ 72x_1 & - & 8x_2 & + & 48x_3 & - & 19x_4 & = & 93 \end{array}$$

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrcrcrcrr} & 3.02x_1 & - & 1.05x_2 & + & 2.53x_3 & = & - & 1.61 \\ & 4.33x_1 & + & 0.56x_2 & - & 1.78x_3 & = & & 7.23 \\ - & 0.83x_1 & - & 0.54x_2 & + & 1.47x_3 & = & - & 3.38 \end{array}$$

(α) Να υπολογιστεί η λύση του ανωτέρω συστήματος με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (i) χωρίς οδήγηση (ii) με μερική οδήγηση.

(β) Να αντικατασταθεί ο συντελεστής του x_1 στην πρώτη εξίσωση με το 3.01 και να υπολογιστεί η λύση του νέου γραμμικού συστήματος.

(γ) Να παραμείνει ο συντελεστής του x_1 στην πρώτη εξίσωση ίσος με το 3.02, αλλά να αντικατασταθεί το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης σε -3.39 και να υπολογιστεί η λύση του νέου γραμμικού συστήματος. Σε τι ποσοστό, σε σχέση με τις αρχικές τιμές του ερωτήματος (α), έχουν τροποποιηθεί οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος λύσης;

3. Για κάθε έναν από τους ακόλουθους επαυξημένους πίνακες, να προσδιορίσετε την τιμή του πρώτου οδηγού στοιχείου για

(α) τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση (β) τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση

(γ) τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση.

(δ) Για τις (β) και (γ) να δειχθούν οι τελικές τιμές των συνιστωσών του διανύσματος ανταλλαγής γραμμών h, και για την (γ) να βρεθεί το βαθμωτό διάνυσμα.

(i)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

(ii)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 9 & -2 & 13 \\ -12 & 0 & -10 & 5 & -17 \\ 72 & -8 & 48 & -19 & 93 \end{array}\right]$$

(iii)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1.78 & 0.56 & 4.33 & 7.23 \\ 2.53 & -1.05 & 3.02 & -1.61 \\ 1.47 & -0.54 & -0.83 & -3.38 \end{array}\right]$$

(iv)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0.25 & 0.35 & 0.15 & 0.60 \\ 0.20 & 0.20 & 0.25 & 0.90 \\ 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.70 \end{array}\right]$$

(v)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0.2115 & 2.296 & 2.715 & 3.215 & 8.438 \\ 0.4371 & 3.916 & 1.683 & 2.852 & 8.888 \\ 6.099 & 4.324 & 23.20 & 1.578 & 35.20 \\ 4.623 & 0.8926 & 15.32 & 5.305 & 26.14 \end{array}\right]$$

4. Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τον τύπο $a_{ij} = 1/(i+j-1)$ για $1 \leq i, j \leq n$.

(α) Για $n = 5, 6, 7$ να λυθεί το σύστημα $Ax = b$ χρησιμοποιώντας αριθμητική απλής ακρίβειας. Σε κάθε περίπτωση, να θεωρηθεί το b σαν το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ακριβή λύση $x_i = 1$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Να συγκριθεί η λύση που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση και με βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση.

(β) Για $n = 11, 12, 13$ να λυθεί το σύστημα $Ax = b$ χρησιμοποιώντας αριθμητική διπλής ακρίβειας. Σε κάθε περίπτωση να θεωρηθεί το b σαν το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ακριβή λύση $x_i = 1$ για κάθε $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Να συγκριθεί η λύση που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση και με βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση.

5. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} - & 149x_1 & - & 50x_2 & - & 154x_3 & = & & 353 \\ & 537x_1 & + & 180x_2 & + & 546x_3 & = & - & 1263 \\ - & 27x_1 & - & 9x_2 & - & 25x_3 & = & & 61 \end{array}$$

Να υπολογιστεί η λύση του με αριθμητική απλής ακρίβειας με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση και με βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση. Με ποια μέθοδο έχουμε την πιο ακριβή λύση; Η ακριβής λύση για αυτό το πρόβλημα είναι η $x = [-1,\ -1,\ -1]^T$.

6. Δίνεται ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 & -356 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 & 2385 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 & -19551 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 & 132274 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 & 34812 \end{array}\right]$$

Να υπολογιστεί η λύση του με αριθμητική διπλής ακρίβειας με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση και με βαθμωτή (scaled) μερική οδήγηση. Με ποια μέθοδο έχουμε την πιο ακριβή λύση; Η ακριβής λύση για αυτό το πρόβλημα είναι η $x = [1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1]^T$.

7. Ο αντίστροφος ενός $n \times n$ πίνακα μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο απαλοιφής του Jordan σε έναν $n \times 2n$ επαυξημένο πίνακα, όπου οι τελευταίες n στήλες είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας. Είναι γνωστό ότι αν εφαρμοστεί η μέθοδος απαλοιφής του Jordan χωρίς να ληφθεί υπόψη η δομή του ταυτοτικού πίνακα, τότε ο υπολογισμός του αντιστρόφου απαιτεί $3n^3 - 2n^2$ αριθμητικές πράξεις. Να δειχθεί ότι αν ληφθεί υπόψη η δομή του ταυτοτικού πίνακα (δεν εκτελείται η πράξη του πολλαπλασιασμού όταν το στοιχείο του πίνακα είναι η μονάδα καθώς και η πράξη της πρόσθεσης/αφαίρεσης όταν ένα από τα στοιχεία είναι το 0), τότε ο υπολογισμός του αντιστρόφου μπορεί να μειωθεί σε $2n^3 - 2n^2 + n$ πράξεις.

8. (α) Να βρεθεί το πλήθος των πράξεων για την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$(A+B^{-1}C)x = b.$$

(β) Να επαναλάβετε το (α) για το σύστημα

$$(BA+C)x = Bb.$$

(γ) Ποιό είναι το βασικό σας συμπέρασμα;

9. Να δειχθεί ότι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{4,2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{5,2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ένας κάτω τριγωνικός πίνακας L, ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιό του και ένας άνω τριγωνικός πίνακας U έτσι ώστε $A = LU$

(β) Να βρεθούν πίνακες L, D, U τέτοιοι ώστε $A = LDU$, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιό του, D είναι ένας διαγώνιος πίνακας και U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος επίσης έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο του.

(γ) Να βρεθούν ένας κάτω τριγωνικός πίνακας L και ένας άνω τριγωνικός πίνακας U με μονάδες στην κύρια διαγώνιό τους τέτοιοι ώστε $A = LU$.

11. Στα ερωτήματα (α), (β), (γ) να εφαρμοστεί η μέθοδος Crout και στην συνέχεια να επιλυθεί το σύστημα $Ax = b$ για κάθε ένα από τα ακόλουθα διανύσματα δεξιού μέλους.

(α)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 6 & 20 & 10 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -16 \\ -7 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(β)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix},\ b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -33 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 17 \\ -19 \\ -35 \end{bmatrix}$$

(γ)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix},\ b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix},\ b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix},\ b_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12. Για κάθε ένα από τα ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης να προσδιοριστεί η LDU παραγοντοποίηση του πίνακα συντελεστών Α και στην συνέχεια να επιλυθεί το σύστημα $Ax = b$.

13. (α) Να κατασκευαστεί αλγόριθμος, ο οποίος να παραγοντοποιεί έναν $n \times n$ πίνακα στο γινόμενο LDU, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιό του, D είναι ένας διαγώνιος πίνακας και U είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος επίσης έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο του.

    (β) Έστω ο πίνακας A, ο οποίος έχει παραγοντοποιηθεί στο γινόμενο LDU, όπου οι πίνακες L, D, U έχουν την ειδική δομή που περιγράφεται στο ερώτημα (α). Να κατασκευαστεί αλγόριθμος, ο οποίος να χρησιμοποιεί αυτή την παραγοντοποίηση για την επίλυση του συστήματος $Ax = b$.

    (γ) Πόσες πράξεις απαιτούνται για τον υπολογισμό της παραγοντοποίησης του ερωτήματος (α); Να συγκριθεί το αποτέλεσμα αυτό με το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται για την LU παραγοντοποίηση.

    (δ) Πόσες αριθμητικές πράξεις απαιτούνται από τον αλγόριθμο του ερωτήματος (β) για την επίλυση ενός συστήματος με LDU παραγοντοποίηση του πίνακα συντελεστών; Να συγκριθεί το αποτέλεσμα αυτό με το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται όταν έχουμε την LU παραγοντοποίηση.

    (ε) Να συγκριθεί το συνολικό πλήθος πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων που χρησιμοποιεί την LDL^T παραγοντοποίηση με αυτό που απαιτείται για την LU παραγοντοποίηση.

14. (α) Να κατασκευαστεί ένας αλγόριθμος για την παραγοντοποίηση ενός $n \times n$ συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα στη

μορφή LDL^T, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιό του και D είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Πόσες αριθμητικές πράξεις απαιτούνται για τον υπολογισμό της LDL^T παραγοντοποίησης; Να συγκριθούν με το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται για την επίλυση του συστήματος με την παραγοντοποίηση Cholesky (LL^T).

(β) Να κατασκευαστεί ένας αλγόριθμος που επιλύει το σύστημα $Ax = b$ χρησιμοποιώντας την LDL^T παραγοντοποίηση του πίνακα συντελεστών του (α). Πόσες πράξεις χρειάζονται για τον υπολογισμό ενός βήματος; Να συγκριθεί το πλήθος των πράξεων που απαιτούνται για την εφαρμογή ενός βήματος σε σχέση με αυτό που απαιτείται όταν χρησιμοποιηθεί η παραγοντοποίηση Cholesky.

15. (α) Να εφαρμοστεί η παραγοντοποίηση Cholesky για κάθε έναν από τους ακόλουθους πίνακες.

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -28 & 0 \\ -28 & 53 & 10 \\ 0 & 10 & 29 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 9/4 & 3 & 3/2 \\ 3 & 25/4 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & 17/4 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 18 \end{bmatrix}$$

(iv)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 20 & -2 & 8 \\ 3 & -2 & 11 & -5 \\ -2 & 8 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

(β) Να επιλυθούν τα συστήματα χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση Cholesky για τον πίνακα συντελεστών A σε κάθε περίπτωση του ερωτήματος (α). Το b δίνεται αντίστοιχα με το ερώτημα (α) από τα ακόλουθα (i)-(iv).

(i) $b_1 = [8, \quad -2, \quad 38]^T$

(ii) $b_2 = [3, \ 1, \ 9]^T$
(iii) $b_3 = [4, \ -4, \ 4, \ -13]^T$
(iv) $b_4 = [15, \ -12, \ 56, \ -35]^T$

16. Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση LDL^T αντί για την παραγοντοποίηση Cholesky.

17. Ένας πίνακας A είναι πενταδιαγώνιος αν $a_{ij} = 0$ όταν $|i-j| > 2$.

    (α) Να δοθεί αλγόριθμος, ο οποίος υπολογίζει αποδοτικά με την παραγοντοποίηση Crout την αριθμητική λύση ενός συστήματος $Ax = b$ όταν ο A είναι ένας πενταδιαγώνιος πίνακας. Αποδοτικά σημαίνει ο αλγόριθμος να εκμεταλλεύεται τη δομή του A (να μην κάνει πράξεις με τα μηδενικά στοιχεία του A).

    (β) Να υπολογιστεί το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων για τον αλγόριθμο του ερωτήματος (α).

18. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες σχέσεις

    (α) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$
    (β) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$
    (γ) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq n^{1/2}\|x\|_\infty$
    (δ) $n^{-1/2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

    για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

19. Να αποδειχθεί ότι η $\ell_\infty - norm$

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

    ικανοποιεί τις ιδιότητες της norm διανύσματος.

20. Να υπολογιστούν οι $\ell_2 - norm$ και $\ell_\infty - norm$ για κάθε ένα από τα ακόλουθα διανύσματα.

    (α) $x = [3, \ -5, \ \sqrt{2}]^T$
    (β) $x = [2, \ 1, \ -3, \ 4]^T$
    (γ) $x = [4, \ -8, \ 1]^T$
    (δ) $x = [-2\sqrt{3}, \ -6, \ 4, \ 2]^T$
    (ε) $x = [e, \ \pi, \ -1]^T$

21. (α) Να αποδειχθεί ότι η $\ell_1 - norm$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ικανοποιεί τις ιδιότητες της norm διανύσματος.

(β) Να υπολογιστεί η $\ell_1 - norm$ για κάθε ένα από τα διανύσματα

(i) $x = [3, \ -5, \ \sqrt{2}]^T$
(ii) $x = [2, \ 1, \ -3, \ 4]^T$
(iii) $x = [4, \ -8, \ 1]^T$
(iv) $x = [-2\sqrt{3}, \ -6, \ 4, \ 2]^T$
(v) $x = [e, \ \pi, \ -1]^T$

22. Έστω $||\cdot||_n$ είναι μια διανυσματική norm. Να δειχθεί ότι η φυσική norm ικανοποιεί την $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$ για $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

23. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές για κάθε έναν από τους ακόλουθους πίνακες

(α)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(β)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

24. (α) Έστω λ μια ιδιοτιμή του πίνακα A και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, να δειχθεί ότι το λ^k είναι μια ιδιοτιμή του A^k με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x.

(β) Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας. Να δειχθεί ότι $||A||_2 = \rho(A)$, όπου $\rho(A) = \max|\lambda|$.

25. Να δειχθεί ότι αν A είναι ένας πίνακας με $\rho(A) < 1$, τότε ο πίνακας $I - A$ είναι μη ιδιάζων.
(*Υπόδειξη:* Αν υποτεθεί ότι ο $I - A$ είναι ιδιάζων τότε να δειχθεί ότι το $\lambda = 1$ είναι μια ιδιοτιμή του A).

26. Αν $A, \ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε να δειχθεί ότι

(α) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

(β) $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$, όπου $\kappa(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$.

27. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 19 \\ 21 & 16 \end{bmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστεί ο αριθμός συνθήκης $\kappa_\infty(A)$.

(β) Για $b = [6,\ \ 5]^T$, να επιλυθεί το σύστημα $Ax = b$ με μια άμεση μέθοδο. Στη συνέχεια, να διαταραχθεί το b κατά $\delta b = [0.01,\ \ -0.01]^T$ και να επιλυθεί το τελικό διαταραγμένο σύστημα. Να συγκριθεί η τιμή του $||\delta x||_\infty / ||x||_\infty$ με το θεωρητικό άνω φράγμα που προβλέπεται από την (3.139).

(γ) Για $b = [1,\ \ 1]^T$ να επαναληφθεί το ερώτημα (β).

28. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.35 & 0.15 \\ 0.20 & 0.20 & 0.25 \\ 0.15 & 0.20 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.90 \\ 0.70 \end{bmatrix}.$$

(α) Να υπολογιστεί ο αριθμός συνθήκης $\kappa_\infty(A)$.

(β) Να επιλυθεί το σύστημα $Ax = b$ με μια άμεση μέθοδο.

(γ) Να διαταραχθεί ο πίνακας συντελεστών και το διάνυσμα του δεξιού μέλους κατά

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \delta b = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ -0.03 \end{bmatrix}$$

και να επιλυθεί το σύστημα που προκύπτει μετά τη διατάραξη. Να συγκριθεί η τιμή του $||\delta x||_\infty / ||x||_\infty$ με το θεωρητικό άνω φράγμα που προβλέπεται από την (3.139).

(δ) Να διαταραχθεί ο πίνακας συντελεστών και το διάνυσμα του δεξιού μέλους κατά

$$\delta A = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 & 0.01 \\ -0.01 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \text{ και } \delta b = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

και να επιλυθεί το σύστημα που προκύπτει μετά τη διατάραξη. Να συγκριθεί η τιμή του $||\delta x||_\infty / ||x||_\infty$ με το θεωρητικό άνω φράγμα που προβλέπεται από την (3.139).

29. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x = (x_i)$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, όπου ο A έχει την *ειδική δομή* :

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & r_1 & & & & & & \\ 0 & d_2 & 0 & r_2 & & & & & \\ l_3 & 0 & d_3 & 0 & r_3 & & & \mathbf{0} & \\ & l_4 & 0 & d_4 & 0 & r_4 & & & \\ & & l_5 & 0 & d_5 & 0 & r_5 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & l_{n-2} & 0 & d_{n-2} & 0 & r_{n-2} \\ & & & & & l_{n-1} & 0 & d_{n-1} & 0 \\ & & & & & & l_n & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα b καθορίζεται από την επιθυμητή λύση x του συστήματος. Για παράδειγμα αν $x = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $b_i = l_i + d_i + r_i$, $1 \leq i \leq n$, όπου $l_1 = l_2 = r_{n-1} = r_n = 0$.

(α) Να δοθεί ο αλγόριθμος της μεθόδου της απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση για την εύρεση του αντιστρόφου A^{-1}, λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα A.

(β) Να βρεθεί το είδος και το πλήθος των πράξεων για τον παραπάνω αλγόριθμο.

(γ) Να υλοποιήσετε σε γλώσσα της επιλογής σας τον αλγόριθμο του (α) και να υπολογιστεί ο αριθμός συνθήκης $\kappa(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$ του πίνακα A .

(δ) Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση(βλ. παρακάτω πίνακα) των αποτελεσμάτων σας και σύγκριση με τα θεωρητικά αναμενόμενα. Συμπεράσματα - Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογή : Επίλυση των γραμμικών συστημάτων $Ax = b$, για $(d_i = 4,\ 1 \leq i \leq n)$, $(r_i = -s,\ 1 \leq i \leq n-2)$ και $(l_i = -s,\ 3 \leq i \leq n)$ με $2 \leq s \leq 16$ και $100 \leq n \leq 1000$, στα οποία γνωρίζετε εκ των προτέρων τη λύση.

Επίλυση του $Ax = b$		
Διάσταση Πίνακα A	Παράμετρος s	Αριθμός Συνθήκης $\kappa(A) = \|\|A\|\|_\infty \|\|A^{-1}\|\|_\infty$
n= ...	2	
	4	
	⋮	⋮
	16	

30. Δίνεται το ακόλουθο τριδιαγώνιο $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix}
d_1 & f_1 & & & & & & & \\
e_2 & d_2 & f_2 & & & \text{\Large 0} & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & e_k & d_k & f_k & & & & \\
 & & & e_{k+1} & d_{k+1} & f_{k+1} & & & \\
 & & & & e_{k+2} & d_{k+2} & f_{k+2} & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \text{\Large 0} & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} \\
 & & & & & & & e_n & d_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \\ g_{k+1} \\ g_{k+2} \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (\Sigma 1)$$

(α) Αν $n = 2k,\ k$ δεδομένος θετικός ακέραιος αριθμός ≥ 2, να βρεθούν οι τύποι για τον υπολογισμό των $l_i,\ r_i$ και s_i (συναρτήσει των $e_i,\ d_i,\ f_i$ και g_i) για το μετασχηματισμό του συστήματος (Σ1) στο ακόλουθο ισοδύναμο

$$\begin{bmatrix}
1 & r_1 & & & & & & & \\
0 & 1 & r_2 & & & \text{\Large 0} & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & 0 & 1 & r_k & & & & \\
 & & & l_{k+1} & 1 & 0 & & & \\
 & & & & l_{k+2} & 1 & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \text{\Large 0} & & & & l_{n-1} & 1 & 0 \\
 & & & & & & & l_n & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix} \quad (\Sigma 2)$$

(β) Να δοθεί αλγόριθμος για την υλοποίηση του μετασχηματισμού (Σ1) $\Longrightarrow$ (Σ2).

31. Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b,\ \ A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \ x = (x_i),\ b = (b_i) \in \mathbb{R}^n$.

(α) Να υλοποιήσετε σε γλώσσα της επιλογής σας τον αλγόριθμο της μεθόδου Jordan με μερική οδήγηση για την επίλυση του γραμμικού συστήματος και να εκτιμηθεί το σχετικό σφάλμα της λύσης x με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

(i) $\dfrac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty}$,
όπου $||\delta x||_\infty = ||x - \hat{x}||_\infty$ το απόλυτο σφάλμα

(ii) $\dfrac{||\delta r||_\infty}{||x||_\infty}$,
όπου $||\delta r||_\infty = ||b - A\hat{x}||_\infty$ το υπόλοιπο

και $\hat{x}$: η προσεγγιστική λύση από την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Υπόδειξη : Για πειραματικούς λόγους συνήθως δίνεται το διάνυσμα x (ως προκαθοριζόμενη λύση) και στη συνέχεια υπολογίζεται το $b = Ax$. (Για παράδειγμα, αν $x = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $b_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, n$).

(β) Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο (α) να υπολογίσετε

(i) τον αντίστροφο A^{-1} του πίνακα A

(ii) τον αριθμό συνθήκης: $\kappa(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$.

Τα προγραμματά σας σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(1) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα

(2) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια τύπων)

(3) να δημιουργεί ένα τυχαίο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια της συνάρτησης rand για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών)

(γ) Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. παρακάτω πίνακα 4.1). Συμπεράσματα - Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογή 1 : $n = 4$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Για την πειραματική επαλήθευση στο (α) θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $x = (1,\ -2,\ 2,\ -1)^T$, υπολογίστε το $b = Ax$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$.
Στη συνέχεια εφαρμόστε το (β) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 2 : $n = 8$,

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -13 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Για την πειραματική επαλήθευση στο (α) θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $x = (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $b = Ax$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$. Στη συνέχεια εφαρμόστε το (β) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 3 :

$$n = 10, \quad A = (a_{ij}) = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

όπου προκαθορίζεται εκ των προτέρων τη λύση (παρόμοια με την εφαρμογή 2). Στη συνέχεια εφαρμόστε το (β) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Πίνακας 4.1

Επίλυση του $Ax = b$ και υπολογισμός του A^{-1} (μέθοδος Jordan)			
Εφαρμογή	Σφάλμα $\frac{\|\|\delta x\|\|_\infty}{\|\|x\|\|_\infty}$	Υπόλοιπο $\frac{\|\|\delta r\|\|_\infty}{\|\|x\|\|_\infty}$	Αριθμός Συνθήκης $\kappa(A)$
1			
2			
3			